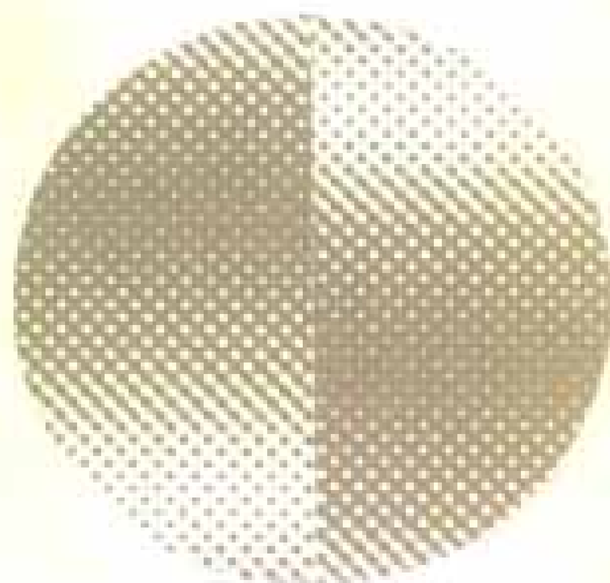
微分方程模型

MODULES IN APPLIED MATHEMATICS

(美) WILLIAM F. LUCAS 主编





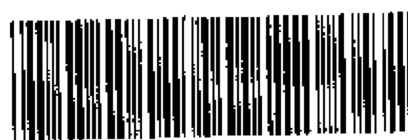
国防科技大学出版社

MODULES IN APPLIED MATHEMATICS

微分方程模型

卢卡斯
(美)WILLIAM F. LUCAS 主编





国 防 科 技 大 学 出 版 社
·长沙·

图书在版编目(CIP)数据

微分方程模型/(美)W.F.LUCAS 主编;朱煜民,周宇虹译;沙基昌校.一长沙:国防科技大学出版社,1998.5

ISBN 7-81024-483-3

Ⅰ.微分方程模型

Ⅱ.Lucas,W.F.

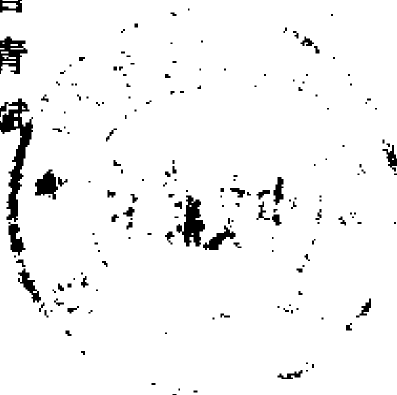
Ⅲ.①微分方程 ②数学模型

Ⅳ.O29

责任编辑:何　晋

责任校对:罗　青

封面设计:陆莱斌



国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681　邮政编码:410073

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

开本:850×1168　1/32　印张:14.25　字数:358 千

1998 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　印数:3 000 册

*

定价:25.00 元

内 容 简 介

本书是美国应用数学权威 W.F. 卢卡斯教授主编的四卷本应用数学丛书的第一卷。本卷以微分方程应用为主线，分析了它在群体增长、艺术品鉴定、技术革新推广、糖尿病检测、作战运筹、交通管理、生态平衡以及能源工程与高寒地区建筑等领域的一系列典型应用问题；措词准确，分析透彻，深入浅出，实用性与启发性兼备，行文着笔活泼诙谐，可读极强。全书共分为六部分，读者可选读任一部分而不会影响对问题的理解。

本书除可作为高等院校理工科学生的数学模型教程外，也是广大工程技术人员、管理人员与数学爱好者不可多得的读物。

版 权 声 明

译 者 序

近半个世纪以来，数学的形象有了很大的变化。数学已不再单纯是数学家和少数物理学家、天文学家、力学家等人手中的神秘武器，它越来越深入地应用到各行各业之中了，几乎在人类社会生活的每个角落它都在展示无穷威力。这一点尤其表现在生物、政治、经济、军事等数学应用的非传统领域。

与这种发展相比，目前我国高等教育中如何运用数学工具解决实际问题就显得过于薄弱，同时也缺乏合适的教材，以至不少数学工作者缺乏从实际问题中提炼数学模型的能力。同时，各行各业中的不少实际工作者也缺乏运用数学工具以建立模型处理问题的能力。这与我国社会、政治、经济发展的要求极不相适应。

卢卡斯教授主编的这一套应用数学模型丛书从各种实际问题出发，提炼出一系列数学模型，并给出了求解方法。从应用范围看，包括自然科学、工程技术、医学、生物、生态、环境、政治、经济、军事、文化、体育、交通等人类社会生活的许多领域；从方法论看，其启发性很强；从数学内容看，要求适中，具有普通理工科大学数学基础的学生和实际工作者都能看懂。

我们翻译这套书的目的就是希望通过这套书的出版有利于培养各专业大学生建立数学模型的能力，有利于促进数学工作者与实际工作者的相互理解与沟通，有利于推动数学在我国现代化建设的各个领域中的应用。

我们十分感谢卢卡斯教授为翻译出版这套丛书提供的方便和帮助，并为中文版作序。刘德铭教授负责与卢卡斯教授的联系。沙基昌教授主持全套丛书的翻译工作，并负责对译文进行审校。

第一卷第一至第十四章由周宇虹翻译，第十五至第二十三章

由朱煜民翻译。

第二卷第一至第八章由王国秋翻译，第九至第十四章由刘德铭翻译。

第三卷第一与第二章由余滨翻译，第三与第四章由沙基昌翻译，第五与第六章由何衰平翻译，第七与第八章由孟实华翻译，第九、第十一与第十二章由成礼智翻译，第十、第十三与第十四章由王炎生翻译。

第四卷第一至第三章由翟晓燕翻译，第四与第五章由许若宁翻译，第六至第十三章由共振高翻译。

对于其他为本书出版作过有益工作的许多人士无法在此一一列举。谨向为本书翻译出版付出辛勤劳动的各位人士致以诚挚的感谢！

鉴于译校者水平所限，译文中错误不妥之处在所难免，敬请各位读者指正。

沙 基 昌
1988 年 5 月 1 日
于长沙

中 文 版 序

编辑这套四卷本丛书的目的是为了提供一大批令人信服的例子，来说明在解决当今世界各种实际问题时数学的巨大威力，同时也是为了纠正数学教学中普遍存在的两种极端倾向。

第一，我们已习惯于将数学作为古已有之的经典教条来教学，而不是像物理学或生物学一样作为活生生的发展着的学科。学生们倾向于将数学视为历史悠久而值得尊重的学科，必须用练习和机械的方式学习，并且数学也确实是理解许多其他现代科学的重要预备知识。普遍推迟体会学习数学对于个人和社会的价值是完全不必要的。

第二个极端是近几十年来对纯粹数学的过分强调，而在数学教学中坚持理论与应用相结合将会更恰当些。我们常以过分简单的“二元论”方式看待事物，把数学或者数学家分为纯粹的和应用的，连续的和离散的，或者研究人员和教师。伟大的英国分析学家 G. H. Hardy 在《一个数学家的自白》(A *Mathematician's Apology*, Combridge University Press, 1940)中认为，纯粹数学是更为自我满足和依靠内在动力的学科。

相反地，美国著名的拓扑学家 Raymond L. Wilder 在《数学概念的演变》(*Evolution of Mathematical Concepts*, Halstead Press, John Wiley and Sons, 1968)中论述了数学的发展与同时期大社会之间的许多密切的内在联系。事实上，许多数学内容都是因社会需要而产生的，同时，如果没有数学，现代技术世界中的绝大部分也是不可能存在的。但是 60 年代，包括美国在内的西方世界却是纯粹数学的观点支配了数学教育。有意义的纯粹学科，如逻辑、近世近数等都有了超越过去世纪的巨大发展，并且完全变成了这个时

期的“新数学”。而其它二十来种有意义的、重要的、但不太抽象的数学分支则被忽略了。

70 年代美国产生了一个相反的运动。曾经有一个在大学水平的课程中安排讲授较为现代的课题以及当代应用的计划。许多人都感到用较为平衡的观点来看待纯粹数学与应用数学、古典数学和现代的数学更好些。这既不需要在美妙与有用之间，也不需要在老与新之间发生任何冲突。这四卷书就是这种尝试的一个结果。它们是来自美国数学协会指导下的两个计算的成果，并且得到美国国家科学基金的资助。具有类似目标的其他计划和书籍亦已问世，而且有几所大学已经着手引进关于“数学构模”的独立的新课程，以便强调这一数学中的重要组成部分。不少人会认为关于建模（或关于数学的历史与文化）的单独的课程并非最适当，如果能在整个课程安排中使数学的所有这些风采各异的不同方面成为一个整体将是最理想的。无论如何，插人这样的新的建模课程对于在整个课程中恢复纯粹数学与应用数学之间的平衡是必要的（也许仅仅是暂时的）措施。

本套丛书中选用的 63 篇文章的作者们高兴地听到了他们的著作即将在中国出版。我们衷心希望读到这本书的学生和教师会发现它们既有趣又有用。

W. F. 卢卡斯

1987 年 10 月 1 日

原　　序

这套四卷本丛书的编写目的是为大学师生提供一批能用于本科教学的、关于数学实际应用的重要例子。我们希望通过这些例子，能够说明现代数学是如何被实际应用于解决当代有关问题的。虽然这些章节是为公共数学教师而写的，但是，它们对于许多应用领域的学生、教师和科学研究工作者也将是有益的。每章都提供了所需的预备知识以及对教师的提示。许多章节在不同的班级实验过，所有章节亦都经过广泛的审查和修订。多数章节还有例题和练习。有些单元可在1个学时内完成，而另一些单元则需要几周才能讲完。

第一卷的23章与微分方程有关，而其中最后四章涉及偏微分方程。其应用问题来自医学、生物、交通系统和一些其他领域。第二卷的14章主要研究政治科学中的问题，同时也涉及到社会学与生态学方面的问题。包括选举系统、带权选举、比例代表制、联盟值和委员会问题等。第三卷14章的重点是离散数学模型，例如图论、组合论和网络理论中的问题。这些技术可用于研究经济、交通理论、运筹学、决策理论以及其他领域，第四卷的12章讨论生命科学中的数学模型。其中包括群体增长和行为、生物医学（流行病学、遗传学与生物工程）以及生态学等方面的问题。

这套丛书是美国数学协会（MAA）两个教育计划实施的结果，它们还部分地受到国家科学基金（NSF）的资助。这两个计划的目的是编写本科教育的教材。第一个计划由MAA的本科数学大纲委员会（CUPM）负责，对本科高年级学生应用数学教学所需的素材和事例进行研究。它得到NSF自1972年9月1日到1977年5月31日的资助（SED72－07370）。这个计划在Donal Bushaw的指

导下完成了。在此期间，Bushaw 和 W. F 卢卡斯担任 CUPM 的主席，而 George Pedtrick 是 CUPM 的执行负责人。该计划的成果是1976 年末发表的由 Maynard Thompson 编辑的报告，题为"应用数学中的事例研究"。其中包括了 11 位作者编写的 9 章以及绪论与该材料课堂试用的报告。

第二个计划由 MAA 的学会和专题研究委员会(CIW)发起，这就是 1967 年在康奈尔(Cornell)大学举行的为期四周的夏季"应用数学模型"专题研究。1975 年 5 月 1 日至 1978 年 9 月 30 日它得到 NSF 的 SED75－00713 资助以及 SED77－07482 的一小部分补充资助。在专题研究小组工作期间，W. F. 卢卡斯担任 CIW 的主席和这个计划的负责人。这项活动的成果是产生了由 37 位作者编写的 60 个用于教学的模型。

这套丛书共有 63 章，其中包括"应用数学中的事例研究"的 11 章中的 9 章和应用数学模型专题研究小组 60 个模型中的 52 个——这些都已作了必要的修订，以及后添的二章(第二卷第七章和第十四章)。Steven Brams 所写的与 1976 年 MAA 的专题研究小组有关的第二卷第三章的最初版本标题为"一个人，n 张选票"，而这里提供的扩充了的版本与美国政治科学协会(APSA)的教材革新计划有关，该计划由 Sheilah K. Kann 负责，部分地由 NSF 的 SED77－18486 资助。该单元标题为"比较选举制"，原来是作为单行本发表的，供教师和学生在课堂上试用。这一章的版权属于 APSA 1978，此外是经允许后采用的。

由 Edwin Beckenbaeh，Leonard Gillman，W. F. 卢卡斯，David Roselle 和 Alfred Willcox 组成的 MAA 的一个专门委员会负责管理出版工作以及某些需要得到 NSF 批准的以这种形式出版的更广泛的尝试。必须提到 Willcox 博士自始至终所作的重要贡献。George Springer 也作了关键性的努力。然而必须强调指出。本书中任何意见和建议都属于各位作者本人，而与 NSF、MAA、编者或

者这个计划的任何参与者的观点没有必然联系。

许多人以各种方式为这四卷书的出版作出了他们的努力，在此无法一一提及。然而，除了作者、编者以及上面提到的名字以外，还有两个人为这几卷书的出版作出了特殊贡献，应该得到真正的荣誉。Katherine B. Magann 在 CUPM 办公室关闭前几年一直在 CUPM 工作，完成了报告——“应用数学中的事例研究”。Carolyn D. Lucas 协助管理 1976 年 MAA 的专题研究小组，负责 60 个模型的完成以及担任这四卷书的责任编辑。没有她坚持不懈的努力，或许就不能有这一庞大计划的最后完成。

W.F. 卢卡斯

1982 年 7 月

第一卷的序

第一卷由 23 章组成，它们涉及数学模型以及利用微分方程求解等问题。第一部分的各章论述了建模过程中最初的、通常也是最重要的部分：如何把所给的问题转化为数学问题。Henderson West 所写的第一章展示了如何把各种应用题转化为微分方程，而 Frauenthal 所写的第三章讨论了群体增长模型的某种特殊情况，这是当前的热门课题之一。第二章描述了如何分析一个微分方程，并根据此方程得出定性的结论，这一章也是由 Henderson West 写的。作者们翔实地论述了这三章，写得极透彻，这在一般教科书中是少见的，因此，对于初学建模的学生来说，这三章属“必读”内容。

Braun 所写的第 Ⅰ 部分中的三章，讨论了三个不同的但都是非常重要的问题，对这些问题均可建立一阶微分方程模型并将其完全解出。有趣的是，这些文章所描述的工作，最初并不是由数学家们做的，而是由化学家、生物学家和社会学家们完成的（事实上，本卷中的许多篇章都是如此）。

第 Ⅲ 部分基本上是第 Ⅱ 部分的继续，不同的是，对这部分问题的建模采用的是高阶线性方程和可解的一阶方程组。在 Braun、Coleman 和 Powers 所写的三章中可以看到，微分方程组可用来为十分复杂和深奥的问题建立模型，而且所得到的结果通常是非常令人兴奋的。

在第 Ⅳ 部分中，Baker 和 Drew 写的五章叙述了数学在交通理论的某些问题上的应用，它们提供了另一类令人感兴趣的模型。虽然得到的结论并不像前面各章中结论那样有说服力和引人注目，但是，它们仍然十分重要。因为它们表明了数学如何帮助我们理解

复杂的、甚至是不可控制的和无法求解的问题。

在第Ⅴ部分中，Braun 和 Coleman 写的五章叙述了非线性方程组及其在生物学和生态学的重要问题上的应用。借助微分方程定性理论的方法，我们可以获得强有力的结论。有趣的是，人们注意到微分方程的定性理论最初是从物理学和天文学问题中引申出来的。同样地，这些方法在生物科学中也有过重要的应用。确实，这样一种强有力的和完善的理论之存在，曾激发了许多数学家去研究生物学和生态学中的某些著名问题。

第Ⅵ部分中的各章论述了运用偏微分方程建模的系统，这是数学分析中比较困难的领域之一。Borrelli 的文章是这部分的基础，它仔细地叙述了这方面的理论以及实际的模型。Drew、Meyer 和 Porsching 所写的其余三章论述了现实生活中的一些重要而具体的应用问题。

Martin Braun
Courtney S. Coleman
Donald A. Drew
1982 年 7 月

单位缩写一览表

单位符号	英文名称	中文名称	备　　注
BTU	British thermal unit	英国热量单位	1BTU=252cal
C	celsius	摄氏	
cal	calorie	卡[路里]	
cm	centimetre	厘米	
D	day	天	
deg	degree	度	
dis	distance	距离	
F	Fahrenheit	华氏	F=(9/5)C+32
fortnight		双周	
ft	foot	呎	1ft=30.48cm
furlong		浪	1furlong =0.201125km
g	gram	克	
gal	gallon	加仑	1gal=4.5461
h	hour	小时	
in	inch	吋	1in=2.54cm

单位符号	英文名称	中文名称	备　　注
kg	kilogram	千克	
km	kilometre	千米	
l	litre	升	
lb	pound	磅	1lb＝0.454kg
mg	milligram	毫克	
mi	mile	哩	1mi＝1.609km
min	minute	分	
ml	millitre	毫升	
mo	month	月	
N	Newton	牛[顿]	
oz	ounce	盎司	1oz＝28.35g
pdl	poundal	磅达	1pdl＝0.138255N
s	second	秒	
T	ton	吨	
veh	vehicle	辆	
yr	year	年	

第 2、3、4 卷目录

第 2 卷　政治及其有关模型

第 3 卷　离散和系统模型

第 4 卷　生命科学模型

第一部分　人口模型

第二部分　生物医学:流行病学、遗传学和生物工程

第三部分　生态学

目　录

第 17 章　群体生物学中的竞争排斥原理

第 18 章　生物循环和五重法

第 19 章　希尔伯特(Hilbert)第 16 问题:有多少循环?

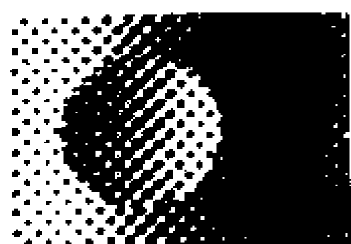
第 VI 部分　导致偏微分方程的模型

第 20 章　调压塔分析

第 21 章　摇动一根弦使其停止

第 22 章　冻土中的热传导

第 23 章　蒸汽发生器流程的网络分析



第 I 部分

微分方程，模型，及其应用

第1章

由应用题建立一阶微分方程

Beverly Henderson West *

1. 引　　言

解"应用题"有时是比较麻烦的。不过你已经知道，只要把问题解释清楚并注意到所用到的单位的种类，就可以解决大多数毋须用微积分的应用题。下面就是这类问题的一个平凡例子。

例1　一个星期天，某人驾车在正午时分离开 A 处，下午3点20分到达 B 处。若车以 55mi/h 的速度等速行驶。从 A 到 B 有多远？

解

$$
\begin{aligned}
\text{距离} &= \text{速度} \times \text{时间} \\
&= (55\text{mi/h})\left(3\frac{1}{3}\text{h}\right) \\
&= (55)\left(\frac{10}{3}\right)\text{mi} \\
&= 183\frac{1}{3}\text{mi}
\end{aligned}
$$

注　在本例及本章的其它例子中，对于**关键的**数学语句（方

* Department of Mathematics, Cornell University, Ithaca, NY 14853.

程、解、初始条件、答案等)，我们在计算过程中都用黑点(·)在其前面标出。

用到微分方程的应用题，比我们上面所讨论的应用问题要困难些。比较一下例1和例2.

例2　一个星期天，某人驾车在正午时分离开 A 处，下午3点20分到达 B 处。如速度计所指示出的那样，他从静止开始，均匀地加速，当他到达 B 处时，速度为60mi/h. 从 A 到 B 有多远?

解　一位缺乏经验的学生可能怀疑所提供的信息不充分。实际上，速度计读数均匀增加意味着车速是时间的线性函数，而速度又是距离关于时间的导数。于是

$$\cdot\ \mathrm{d}S/\mathrm{d}t = at + b(\mathrm{mi/h}),$$

积分，得

$$\cdot\ S = \frac{1}{2}at^2 + bt + c(\mathrm{mi}).$$

若 t 以小时度量，则问题中的其余信息告诉我们

$$\cdot ①\quad S(0) = 0;$$

$$\cdot ②\quad \mathrm{d}S/\mathrm{d}t(0) = 0;$$

$$\cdot ③\quad \mathrm{d}S/\mathrm{d}t\left(3\,\frac{1}{3}\right) = 60;$$

$$\cdot ④\quad S\left(3\,\frac{1}{3}\right) = ?$$

前三个条件足以算出 a、b、c，而第四个将给出问题的答案：

$$c = 0\ (\text{由 ①}),$$

$$b = 0\ (\text{由 ②}),$$

$$a = 18(\text{由 ③}).$$

因此

$$S\left(3\,\frac{1}{3}\right) = 9t^2 = 9\left(\frac{10}{3}\right)^2 = \cdot\ 100\mathrm{mi},$$

这就是从 A 到 B 的距离。

也许你用的方法与此不同，但所有这些要素一定都隐含在你的解中。例如，你可能知道"由静止开始"意味着 $dS/dt = at$，但是，你实际上是利用了问题所给的信息（条件②）而得知常数 $b = 0$.

让我们来看另一个简单而常见的微分方程应用题。

例 3 细菌的增长率与总数成正比。如果培养的细菌总数在 24h 内由 100 增长为 400，那么，前 12h 后总数是多少？

解 第一句话说的是任何瞬间都成立的事实；第二句话给出的是特定瞬间的信息。如果我们用 $y(t)$ 表示总数，第一句话告诉我们

$$dy/dt = ky,$$

它的通解为

$$y = Ae^{kt}.$$

A 和 k 这两个常数可以由问题中第二句话提供的信息计算出来，即

$$① \quad y(0) = 100,$$

和

$$② \quad y(24) = 400,$$

其中 t 的单位为小时。①意味着

$$y(0) = Ae^0 = A = 100.$$

②意味着

$$y(24) = 100e^{24k} = 400.$$

它给出

$$k = (\ln 4)/24.$$

故

$$y(t) = 100e^{t\ln 4/24}.$$

要我们求的是

$$y(12) = 100e^{(12/24)\ln 4} = 200 \text{ 个细菌。}$$

（求解过程的全部细节将在习题 1 中讨论。）

注 我们选择小时作为 t 的单位。如果用天作单位（则 24h 给

出 $t=1$,12h 给出 $t=1/2$),同样可以解决问题。只要解题过程中前后一致,你就可以任意选择时间单位。在习题 1 中你可以证实,用天取代小时后,虽然在求解过程中有些常数的值将有所不同,但是最终的答案将是一样的:总数=200.

你已看出,涉及微分方程的应用题比例 1 需要更多的解释说明,而且不可能把数据一下子放到一个方程中去。让我们来概括一下例 2 和例 3 所遵循的模式。

对于涉及一个依赖于时间 t 的量 y 的情况,建立一个给出 y'、y 与 t 之间关系的方程,它在**任何特定时刻** t 都成立。对这个方程积分,便得到一个只含有 y 和 t 而不含 y' 的新方程。这个新的方程中含有积分常数,并且**对任何特定的** t 仍然成立。现在,问题中给出的仅在一些特定时刻成立的信息(如"列车的制动器在上午 11 点 22 分失灵")将用来计算这些积分常数以及任何其它参数(线性参数、比例参数等)。最后,我们得到一个函数 $y(t)$,对任何其它的 t 值,可立刻算出 $y(t)$ 的值。下一节我们将在这个模式的基础上展开讨论。

2. 若干准则

即便是给出无数条有关应用题的准则,我们也得不到一种建立和解决所有这些问题的通用法则,但是我们可以列出必须充分注意的关键之处。

记住,你要找的是微分方程的一条解曲线。微分方程所反映的思想是:如果你知道曲线上每一点处的导数以及它的起始点,那么,你就能够重新构造这条解曲线。

1)**转化** 在实际问题中,有许多表示"导数"的常用词,如"速率"、"增长"(在生物学以及人口问题研究中)、"衰变"(在放射性问题中),以及"边际的"(在经济学中)等。"改变"、"变化"、"增加"、

"减少"这些词就是信号，要注意**什么**在变化，导数也许用得上。(参看下一节例5.)

想一想，你所考虑的问题是否遵循什么原则或物理定律?是应该用已知的定律呢? 还是必须去推导问题的合适结果? 对这些问题的回答将直接引导你如何去处理问题。如果涉及的是你所不熟悉的领域，那么，当你第一次遇到这些问题时，你可能会感到无从下手。在后续的例题中，我们对这一点将给予特别注意。

不少问题都遵循着下面的模式：

净变化率=输入率－输出率。

如果当这个模式出现的时候你能理解它(并且你使用的是正确的物理单位)，或许你所要的微分方程就近在咫尺了。

2)**微分方程** 微分方程是一个在**任何时刻**都必须正确的瞬时表达式。这是数学问题的核心。如果你看到了表示导数的关键词，你就想要寻找y'，y及t之间的关系。首先，把注意力集中**在文字形式**的总关系式上，如"速率=输入－输出"。写出这些关系式，然后确信你填写好了式子中所有的项。

3)**单位** 一旦你认定了哪些项应该列入微分方程中，你就要确保每一项都采用同样的物理单位(例如，gal/min，furlongs/fortnight). 但是，在实际(以及书本)练习中，本来并不保证这一点。对物理单位予以注意常常对完成微分方程本身也有帮助(参见后面的例5)。

4)**给定的条件** 这些是关于系统在某一**特定时刻**的信息。它们独立于微分方程而成立。在微分方程解出后，我们利用它们来确定有关的常数，这些常数包括比例系数、原微分方程的其它参数，以及解中的积分常数。

为了完整、充分地给出问题的数学陈述，应将这些给定的条件**和**微分方程**一起**写出。(在例2和例3中，这项工作被推迟了，目的是要说明它们的必要性。)

5)**概念框架** 如前所述，在我们的所有例题中，黑点(·)标志着关键的数学语句，从而帮助你抓住整个解题过程中的主要步骤。在一个典型问题中，当你依次得到下面这些结果时，关键步骤就算完成了：

把用语言叙述的情况概念化为文字方程；

陈述出所涉及的原则或物理定律；

微分方程；

给定的各种条件，包括初始条件或其它条件；

微分方程的解；

求出了常数的解；

问题的答案。

你需要找出所有这些关键步骤。我们把这些步骤的全体称为“框架”。在问题中，每一步的目的就是为了完成框架中下步所要做的事。

当你比较深入地钻研到微分方程(DE's)领域时，这些应用问题的计算部分就变得更长更复杂了，这可能导致无条理的头脑在研究应用问题中失利。在最终得到简单的结果之前，你往往要用很多篇幅来计算，以至于你已经忘记了这不过是原始问题中的一小部分。这在高阶非齐次线性微分方程、微分方程组，或者在偏微分方程中尤其如此。所以从现在起就应该学会条理化。

你常常想一下就知道做到哪一步了。全凭脑子来做这些事是危险的，如果你一定要知道的话，那么，写出框架是很重要的。如果你希望别人能够看懂你的工作，那么，写出一个清楚的框架就是必要的了。

在着手研究一个应用题时，一个好的方式就是写出你所知道的有关这个问题的每一件事。用框框、黑点、或其它记号标出组成框架的关键语句。再按照框架表中的其它部分做。

在这些准则中，我们很少谈及微分方程的解，因为这不是本章

的目的。我们所关注的是将应用题翻译过来，使之只剩下常规的计算。对于那些较简单的问题，我们所讲的技法看起来似乎是杀鸡用了宰牛刀。但是，我们的目的是要帮助你解决困难的问题。

有关解决需要用到一阶微分方程的应用题的一般原则就是这些。在你寻找解法的时候，记住下面这五条准则——

翻译；

建立瞬时表达式；

配备物理单位；

叙述给定的条件；

写出清楚的框架。

要得到更多的对解题过程的感性认识，唯一的方法就是试着解决一些问题。

现在，你应该能够探索练习了。下一小节我们给出了一些例题，这些例题对你的某些卡壳的地方可能会有些帮助，但也可能没有。我们只是提供一种可能的思维训练而已。

3. 举　　例

如果在阅读解法之前，你自己先试着做一下，那么，你将从这些例题中得到尽可能多的收获。你的目的是学会解决应用题，而不仅仅是看看别人的做法。你或许会创造一种与我们的解法不同的正确解法(就像例题 1 那样)。要检验的是你是否得出了同样的答案。如果你的答案不对，那就看看你漏掉了什么，或在什么地方错了。要是你运气不好，就去请教一下别人。

例 4　将室内一支读数为 60°的温度计放到室外。10min 后，温度计的读数为 70°；又过了 10min，读数为 76°. 先不用计算，推测一下室外的温度。然后，利用牛顿的冷却定律计算出正确的答案。

牛顿的冷却定律或称加热定律是：将温度为 T 的物体放入处于常温 m 的介质中时，T 的变化速率正比于 T 与周围介质的温度差。在这个数学模型中，假定介质足够大，从而，当放入一个较热或较冷的物体时，m 基本上不受影响。实验证明，这是一个相当好的近似。

解 显然，对于这个应用题，首先要做的是了解牛顿定律的含义，这已经做过了。所以，用了两段话来作为我们求解的出发点。

你应该将目标对准第三段中的关键词"以某一速度变化"。这句话是说 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t$ 与 $T-m$ 是成比例的，即 $\mathrm{d}T/\mathrm{d}t = k(T-m)$. 给出的三个特定条件是：

$$T(0) = 60,\ T(10) = 70,\ T(20) = 76.$$

其中 t 的单位是分钟，而 T 的单位是度。微分方程的解为 $T = Ae^{kt} + m$，其中的三个常数 A、k、m 完全可以由所给的三个条件解出。（参看习题 2。）

现在，我们来看问题所问的是什么？简单地说，就是 m 是多少？正如我们已经注意到的，问题中已给了足够的信息。我们还注意到，至少对这个问题而言，你并不需要求出 A 或 k 来（除非在求 m 的过程中你需要它们）。不过你应该注意到，在 t 无限增加时，为使 T 趋于常数 m，k 必须是负的，所以认识到这一点是聪明的。

例 5 某人的食量是 2 500cal/天，其中 1 200cal 用于基本的新陈代谢（即自动消耗）。在健身训练中，他所消耗的大约是 16cal/kg/天乘以他的体重（kg）。假设以脂肪形式贮藏的热量 100%的有效，而 1kg 脂肪含热量 10 000cal. 求出这人的体重是怎样随时间变化的。

与前面的例子相比，你可能不太熟悉这个特殊的应用问题。所以，这是一个让你自己试着动手的很好的例子。将本例的其余部分盖起来，对所讲的解题程序作一次练习。当你卡住时，你就移开纸看看，直到你想通了，然后再试试你能不能从这里继续做下去。

解　在问题中并没有"导数"这样十分关键的词出现，但是我们可以把注意力集中于最后的问题，它指出・我们想得到体重(记作 w) 关于时间的函数。如果我们把 w 看成是关于时间 t 和连续函数，我们就能找到一个含有 dw/dt 的微分方程。

问题中所涉及的时间仅仅是"每天"，所以，你就把注意力集中于一天并尝试着列出概念性的陈述，如

每天，重量的变化＝输入－输出；

输入是指扣除了基本新陈代谢之外的净重量吸收；

输出就是进行健身训练时的消耗(WPE)。

由于我们的目的是考察导数，因此，上面的陈述可以合并为更好的概念性陈述：

・体重的变化/每天＝ 净吸收量/每天－WPE/每天。

这是一个很好的结构式。我们可以填充各个部分了。

每天的净吸收量＝2 500cal/(一天所吃的)

－1 200cal/(一天中新陈代谢所消耗掉的)

＝1 300cal/天.

每天的净输出＝16(cal/kg)/天× $w$kg(在 WPE 中)

＝16$w$cal/天.

体重的变化/天＝ $\frac{\Delta w}{\Delta t}$ kg/天＝ $\frac{dw}{dt}$ ・kg/天，

(当 $\Delta t \to 0$ 时)

这就是我们所需要的关于连续变化函数 $w(t)$ 的瞬间关系。正如你已经注意到的，有些量是用能的形式(cal)给出的，而另外一些是用重量的形式(kg)给出的。关于结构式左边的单位(kg/天)与在右边出现的单位(cal/天)不相配的问题，你该怎么办呢?这就是有关信息的最后一句话的有用之处，它给出 cal/kg. 我们可以利用

$$\text{kg/ 天} = \frac{\text{净 cal/ 天}}{10\ 000\text{cal/kg}}.$$

因此，将数据代入进去，得

$$\frac{dw}{dt}=\frac{(2\ 500-1\ 200)-16w}{10\ 000} \tag{1}$$

这个式子可用物理单位检查如下：

$$\frac{\text{kg}}{\text{天}}=\frac{\text{cal/ 天}-((\text{cal/kg})/\text{ 天})(\text{kg})}{\text{cal/kg}}.$$

在你的答案中会有多少常数呢？一个，即由积分产生的。这样，为了得出这个人在某一天中体重的数字答案，你需要多少给定的条件呢？一个，例如开始时他的体重：$t=0, w=w_0$.

现在，例5的问题已经完全建立起来，可以进行常规的计算了。不过，我们还将把这个问题继续讨论下去，以追踪所说明的问题及其结果。用分离变量可以很容易地求得微分方程(1)的解。再往下做：

$$\frac{dw}{1\ 300-16w}=\frac{dt}{10\ 000},$$

$$-\frac{1}{16}\ln|1\ 300-16w|=\frac{t}{10\ 000}+C.$$

利用所给的初始条件，算出常数

$$C=-\frac{1}{16}\ln|1\ 300-16w_0|,$$

从而得

$$|1\ 300-16w|=|1\ 300-16w_0|\exp(-16t/10\ 000).$$

因为指数因子是正的，因此$(1\ 300-16w)$与$(1\ 300-16w_0)$同号，故我们可以把绝对值符号去掉。*

$$1\ 300-16w=(1\ 300-16w_0)\exp(-16t/10\ 000).$$

解出 w

---

* 原文此处有误。原文直译是"(事实上，必定是输入≥输出，故我们可以将绝对值符号去掉。)"实际上，输入可以小于输出，比如当这个人的体重正在下降时就是如此。因此，不能轻易去掉绝对值符号，而应先推出 $|1\ 300-16w|=|1\ 300-16w_0|\cdot\exp(-16t/1\ 000)$，并证明$(1\ 300-16w)$与$(1\ 300-16w_0)$同号。——译注

$$w = \frac{1\,300}{16} - \left(\frac{1\,300 - 16w_0}{16}\right)\exp(-16t/10\,000)(\text{kg}) \quad (2)$$

这样，我们就回答了所提出的问题。现在，我们再来考虑一个可能的附加问题："这个人的体重会达到平衡吗？"

由(2)我们可以回答这个问题：当 $t \to \infty$ 时，表达式(2)的右端第二项趋于0*，故 $w \to 1\,300/16$kg. 但是，我们也可以直接由微分方程(1)回答这个问题。在平衡状态下，w 不发生变化，所以 $dw/dt = 0$. 这就非常直接地给出了

$$w_{平衡} = \frac{1\,300}{16}\text{kg}.$$

所以，如果我们需要知道的仅仅是这个平衡值，我们就不必去解微分方程了！只要在(1)式之后添上一行就可结束。

例6　6%的连续复利相当于年利率多少？如下所示，用微分方程的思想很快就能解决这个问题。不过，有些人认为在银行利息问题中，采用这种方法不太自然。这个问题也可直接地且更传统地当作普通利息的延伸来解决。习题3中描述了这种方法的要点。

解　设 $S(t)$ 是在 t 时刻的存款。$S(t)$ 中包括连续复利。在 $t = 0$ 时，设 $S = S_0$，它简单地表示了最初的金额，即本金。

那么所问的问题是什么？实质上就是问一年内增加了多少钱？如果在 $t = 1$ 时，我们设 $S = S_1$，则

$$等价年利率 = \frac{增加的钱数}{初始数} = \frac{S_1 - S_0}{S_0}.$$

"利率"就是 dS/dt，这是因为单位时间内存款 S 的瞬时变化仅仅取决于该时刻的利息计算。因此，由于连续复利，在任一瞬间 $dS/dt = 0.06S$.［对这个微分方程的另一种叙述是这样的：dS/dt = 存款总数的变化率。所以，每一美元在帐中的变化率 $= 0.06 = (dS/dt)/S$］. 这个微分方程有通解 $S = Ae^{0.06t}$.（在习题1

* 原文"这个表达式的右端项"有误，应为"右端第二项"。——译注

中你可以检验这个结果，设 $y = S, k = 0.06$）。

我们需要一个条件来确定 A，这可通过设 $t = 0$ 时，$S = S_0$ 而得到。将这个初始条件代入通解中，得 $S = S_0 e^{0.06t}$. 别忘了我们要求的是年利率 $(S_1 - S_0)/S_0$. 首先，求出 $S_1 = S_0 e^{0.06} \approx 1.0618 S_0$. 则

$$\frac{S_1 - S_0}{S_0} = \frac{(1.0618 - 1)S_0}{S_0} = 0.0618,$$

或 6.18% 的年利率。注意，对这个特定的问题，我们并不需要常数 S_0 的值。从数学上讲，就是所求的答案与 S_0 无关。

例7 在一个巴基斯坦洞穴里，发现了具有古代尼安德特人特征的人骨碎片，科学家们把它们带到实验室，作碳14年代测定。分析表明，C^{14} 与 C^{12} 的比例仅仅是活组织内的6.24%，此人生活在多少年前？

（碳14年代测定：活体中的碳有一小部分是放射性同位素 C^{14}. 这种放射性碳是由于宇宙射线在高层大气中的撞击引起的，经过一系列交换过程进入活组织中，直到在生物体中达到平衡浓度。这意味着在活体中，C^{14} 的数量与稳定的 C^{12} 的数量成定比。生物体死亡后，交换过程就停止了，放射性碳便以每年八千分之一的速度减少。）

解 碳14年代测定可计算出生物体的死亡时间；所以，我们的问题实际上就是："这人死去多久了？"若设 $t =$ 死后年数及 $y(t) = C^{14}/C^{12}$（例如 mgC^{14}/mgC^{12}），则上文中最后一句话就给出了我们的微分方程，单位为 $mgC^{14}/mgC^{12}/yr$.（与关键词"速率"相当）

$$\frac{dy}{dt} = \frac{y}{8\,000}\,(yr),\text{（减少）}^*.$$

放射性衰变的这种性质还可描述为"放射性物质在任意时刻

---

* 原文等式右端误为 $-1/8\,000yr$. ——译注

的衰变速度都与该物质现存的数量成比例”。而C^{14}的比例数为每年八千分之一。

积分后，解中只带一个常数，故给出一个条件就可以了。这可由生物体的死亡时间给出。当$t=0$时，设$y=y_0$；即活体中C^{14}的比例。

微分方程的通解为

$$y=ke^{-t/8\,000}.$$

还剩两步：算出k及回答问题。

初始条件告诉我们$k=y_0$，故有

$$y=y_0e^{-t/8\,000}.$$

问题要我们求出$y=0.0624y_0$时的t.

$$0.0624y_0=y_0e^{-t/8\,000}$$

$$t=-8\,000\ln 0.0624\approx 22\,400\text{yr}$$

这就是此人的死亡年数。

注 现在，碳14年代测定法已受到怀疑——在2 500到10 000年前这段时间中与其它断代法的结果有差异。1966年，耶鲁实验室的 Minze Stuiver 和加利福尼亚大学圣地亚哥分校的 Hans E. Suess 在一份报告中指出了这一时期使碳14年代测定产生误差的根本原因。在那个年代，宇宙射线的放射强度减弱了，偏差的峰值发生在大约6 000年以前。这两位研究人员的结论出自对Brist/econe松树所作的碳年代测定的结果，因为这种松树同时还提供了精确的年轮断代。他们提出了一个很成功的误差公式，用来校正根据碳测定出的2 300到6 000年前这期间的年代：

$$\text{真正的年代}=C^{14}\text{年}\times 1.4-900.$$

例8 一只装满水的圆柱型桶，底半径为10ft，高为20ft，底部有一直径为1ft 的小孔。问桶流空需多长时间？

对孔口的流速需作一个物理假设。即使你觉得与物理学相差甚远，还是请你考虑下面的分析。假设t时刻的流速依赖于此刻桶

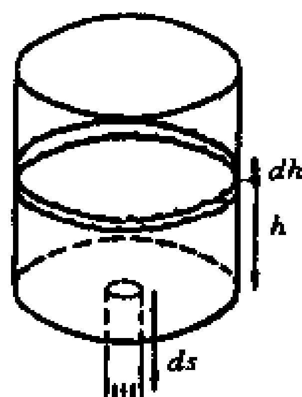


图 1.1

内水的高度 $h(t)$. 显然，装满水时的流速比几乎空了的时候要快(水越深所产生的将水喷出小孔的压力越大)。进一步地，若假设无能量损失，那么，当少量水流出时，顶部减少的势能须等于等量的水流出小孔时的动能。即在任意时刻有

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2,$$

于是

$$v = \sqrt{2gh},$$

这就是物理学中的托里拆利定律，其中 g 为重力加速度。从物理上讲，这个模型可能过于简单了，但至少速度依赖于高度看来是合理的。更进一步的物理假设可能会产生更好的速度公式，不过，这并不会改变我们下面所要进行的数学分析。

解 问题的提法告诉我们要注意体积。随着水从小孔流出，桶内水的体积不断减少。设 A 为桶的水平面积，B 为孔的水平面积。则在任意时间间隔 $\mathrm{d}t$ 内，

$$\underset{\text{(桶内水的体积减少)}}{-A\mathrm{d}h} = \underset{\text{(流出水的体积增加)}}{+B\mathrm{d}s}$$

我们的问题是什么？什么时候(即 t 为何时)$h=0$？因此须求出 $h(t)$. 到目前为止我们已经有了一个关系式，它可改写成 $\mathrm{d}h = -(B/A)\mathrm{d}s$. 其中 A 与 B 可以算出，但 $\mathrm{d}s$ 如何？

我们掌握的另一个信息就是速度产生了 $\mathrm{d}s$. 故可作出如下代换。

$$\mathrm{d}s = (\mathrm{d}s/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t = v\mathrm{d}t$$

从而

$$\mathrm{d}h = -(B/A)v\mathrm{d}t.$$

我们可以算出下面这些量

$$A = \pi(10)^2\mathrm{ft}^2$$

$$B = \pi(1/24)^2 \text{ft}^2$$

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(32)h} = 8h^{\frac{1}{2}} \text{ft/s}.$$

作代换及变量分离，得

$$h^{-\frac{1}{2}} dh = \frac{-8(1/24)^2}{10^2} dt$$

从而

$$2h^{\frac{1}{2}} = \frac{-8(1/24)^2}{10^2} t + K.$$

当 $t = 0$ 时，$h = 20$，得 $K = 2\sqrt{20}$. 我们要求 $h = 0$ 时的 t，故

$$t = \frac{100}{8(1/24)^2}(2\sqrt{20} \approx 18(\text{h})(\text{或 } 64\ 800\text{s}).$$

练　　习

（最难的练习标有符号＋.）

1. 完成例3中的下列细节：
   a) 解 $dy/dt = ky$（用分离变量法）得出
   $$y = Ae^{kt}.$$
   b) 证明 $y(24) = 400$ 意味着 $k = (\ln 4)/24$.
   c) 证明 $y(12) = 200$.
   d) 证明如果时间单位为天，你会得到同样的答案：总数＝200.
2. 完成例4中的下列细节：
   a) 解 $dT/dt = k(T - m)$ 得出 $T = Ae^{kt} + m$.
   b) 利用三个给定条件，求 m.
3. 试用别的方法处理例6. 再次假设 $S(t)$ 表示存款，是 t 的函数，t 以年为单位。
   a) 按年支付的年利率为 r 的单利是指 $S_1 = S_0 + rS_0$，证明 n 年后，$S_n = (1+r)^n S_0$.
   b) 年利率为 r 的季度复利是指一个季度后 $S(1/4) = S_0 + (r/4)S_0$. 证明 n 个季度后，$S(n/4) = (1 + r/4)^n S_0$.
   c) 年利率为 r 的日复利是指一天以后 $S(1/365) = S_0 + (r/365)S_0$. 证明 n 天后 $S(n/365) = (1 + r/365)^n S_0$.

d) 年利率为 r 的连续复利由 $\lim_{m\to\infty} S(n/m)$* 计算。证明，这意味着在 $t=n/m$ 的瞬时，$S(n/m)=(e^r)^{n/m}S_0$，也就是 $S(t)=S_0e^{rt}$。

4. C^{14} 的半衰期是多长？（参看例7. 半衰期就是放射性同位素的数量衰减一半所需的时间。）

5. 1868年，在法国的科罗玛格诺，人们在修筑铁路时，在一个洞穴中发现了人类遗骸。Philipvan Doren Stern 在一本名叫《史前的欧洲：从石器时代的人类到古希腊人》的书中断言，关于这些遗骸年代的最佳估计，是公元前30 000年到20 000年。表示这个年代区间的 C^{14} 与 C^{12} 之比的实验测定范围是什么？（参看例7.）

6. 根据牛顿定律，物体在空气中的冷却速度与物体和空气的温度差成比例。如果空气的温度是20℃且沸腾的水在20min 内冷却到60℃，那么水温降到30℃需多长时间？

7. 一位稀里糊涂的咖啡泡煮师，想让水达到185℉，可他几乎总是忘记这一点而把水煮开。由于温度计坏了，他要你计算一下，从212°冷却到185°要等多长时间？你能解决他的问题吗？如果你回答“能”，那就计算一下。如果“不能”，解释一下为什么？

8. 在60℃的房间内，100℃的水在3min 内冷却到90℃. 当水与房间的温差最大时，水温变化最快。实验表明变化率与温差成比例。
   a) 求6min 后的水温。
   b) 什么时候水温为75℃？61℃？

+9. 现有整整4 000ml10℃的化学溶液，一位摄影师将一只盛有40ml90℃的水的塑料杯浮在溶液上。这样既可加温又不会稀释溶液。
   a) 将溶液的温度表示为时间的函数。
   b) 使你的模型与例4中的温度模型相一致。

10. 一滴球形雨滴，以与它表面积成比例的速度蒸发。求其体积 V 关于时间的函数式。

11. 一只100gal 的水箱，盛满了水和20lb 的盐。将淡水以2gal/min 的速度抽入箱内。连续地搅拌混合液，并使箱内溶液保持在100gal，1h 后盐的浓度被稀释了多少？

12. 在进入供水系统之前，对原污水进行处理，可减少水的污染。一种常用的处理方法是使用一只活化污泥交换箱，在交换箱内装有一种浓度为 c 的活性污泥。把污染度 c_1 的原污水灌入箱内，细菌将消化掉一部分污物，剩下的较清洁的混

---

* 求极限时应保持 n/m 不变（或基本不变）。—— 译注

合物则被注入一只贮水器中。按规定排出物的污染度不得超过安全标准，如 $0.3c_1$，故我们的问题是求出达到安全标准的时间。实际上，到那时(t)，可以把原污水引入另一个交换箱中，而原箱内的活性污泥经交换处理后污染度由 c 降至一个适当的最低度 c_0. 假定每分钟输进交换箱的污水为 $r_1$gal，而排出的水为 $r_2$gal. 在 $t=0$时，交换箱内有 V_0gal 的污水，其中含有 $z_0$16污染物。建立一个数学问题以求出何时应该对交换箱实行分流。

13. 如果一笔存款连同连续复利一道计算，在16年内翻了一番，问利率是多少？

14. 某学院的教育基金，最初投资是＄P，以后按利率为 r 的连续复利增长。另外，每年在基金开算的周年日都要加上新的资本，速率为＄A/yr. 求七年的累积金额。

15. 一只水桶，内盛10gal 溶解了5lb 盐的盐水。将每 gal 含盐2lb 的盐水以3gal/min 的速度灌入桶中，并让搅拌好的混合液以同样的速度流出。

    a) 8min 后，流出桶的盐水中盐的浓度是多少？

    b) 足够长的时间后，桶内的盐有多少？

16. 在一个原子核反应堆中，在任意时刻，中子数的增加速度与其当时的数量成比例(由于原子核裂变)。如果初始时中子数为 N_0，T_1 和 T_2 时刻的中子数分别为 N_1 和 N_2，证明

$$(N_2/N_0)^{T_1} = (N_1/N_0)^{T_2}$$

17. 污染物质的含量为2oz/gal 的水以500gal/min 的速度流过处理箱。在箱内，每分钟处理掉2%的污染物，且水被彻底搅匀。处理箱可容纳10 000gal 的水。在处理厂开张那天，箱内装满了净水。求流出的水中污染物浓度的函数。

+18. 一只底部开口面积为0.5cm²的圆锥形漏斗高为10cm、顶角 $\theta=60°$，其内装满水，水流完需多长时间？

19. 在 $t=0$ 时，两只桶内各装有100gal 的盐水，其浓度为1.5lb 盐/gal. 用管子将净水以2gl/min 的速度输送到第一只桶内，搅拌均匀后，混合液又由管子以2gal/min 的速度被输送到第二只桶内。再将混合液搅拌均匀，然后用管子以1gal/min 的速度输出。在任意时刻 $t>0$，从第二只桶流出的水中含多少盐？

20. 试建立在作了葡萄糖输液后，人体内葡萄糖浓度的模型：输液就是让某种液体以稳定的速度进入静脉的过程(在病床旁吊只瓶子进行静脉注射时就是如此)。当葡萄糖输入时，自由葡萄糖的浓度势必下降(主要是由于与磷化物的结合所致)；浓度下降的速度与葡萄糖的数量成正比。用 G 表示葡萄糖的浓度，A 表示输入速度(mg/min)，B 表示体内(血管内)液体的体积。寻求体内的葡萄糖浓度是否以及怎样达到平衡态。

+21. 练习20中的模型有一个不足之处，它假设体内液体的体积为常量。然而，由于人体含有大约4 600ml 的血液，输入500ml 葡萄糖溶液后，体积的变化是不容忽视的。如何修改这个模型，使其能反映体积变化？即如何修改微分方程？这会影响你的关于平衡值的答案吗？如何影响？这个模型的局限性是什么？（除了可能有那么一个很难求解或分析的微分方程外，对于有关体积可变的想法你有什么限定或者评论？）为了对这个问题做进一步的工作，你会向一位医生或生物学家提些什么样的问题呢？

22. 在一种溶液中，化学物质 A 分解而形成 B，其速度与未转换的 A 的浓度成比例。转换 A 的一半用了20min. 把 B 的浓度 y 表示为时间的函数，并作出图像。

23. 在一堂淡水生物学课上，要做一项在恒化器中连续培养水藻的实验。使用的仪器是一个培养容器（带有溢出管以保持8l 的容积），用测好的常速气流向管内连续地输送新鲜培养基。学生们人手一张说明书，其中包括实验中的物理数据和数值数据，以及下面这段说明：

“随着向培养容器内注入新鲜培养基，我们有可能计算出在任意给定的数小时后，培养容器中产生的培养基的理论百分比浓度。所用的数学关系式如下：

$$C_T = C_0 + (C_i - C_0)(1 - e^{-(T-T_0)(R/v)})$$

其中

C_T：在任意时刻溢出的浓度

C_0：$T = T_0$ 时的浓度

C_i：流入的浓度

R：流速(ml/h)

V：容器的体积(ml)

T：任意时刻的时间

T_0：初始时间。”

说明你能轻而易举地证明这个公式是正确的，虽然它简直像是魔术师帽里的“无物”。

24. 一场降雪开始于午前的某个时刻，并持续到下午，雪量稳定。某人从正午开始清扫某条街的人行道，他的铲雪速度（以 ft^3/h 度量）和清扫面的宽度均不变。到下午2点他扫了两个街区，到下午4点他又扫了一个街区。雪是什么时候开始下的？（你可假设他没有回头清扫落在已扫过的路面上的雪。）

解 答

1. a) $dy/dt=ky$，故

$$dy/y = k\,dt \quad \text{（分离变量）}$$

$$\ln y = kt + C \quad \text{（对两边积分）}$$

$$y = e^{kt+c} \quad \text{（表成指数形式）}$$

$$= e^{C} \cdot e^{kt}$$

$$= Ae^{kt} \quad \text{（保持一个常数）。}$$

b） $y(24)=100e^{24k}=400$

$$e^{24k} = 4 \quad \text{（将带有 } e \text{ 的因子分离出）}$$

$$24k = \ln 4 \quad \text{（两边取对数）}$$

$$\therefore k = (\ln 4)24.$$

c） $y(12)=100e^{12(\ln 4/24)}=100(e^{\ln 4})^{1/2}=100(4)^{1/2}=200.$

d） $y=A^{*}e^{k^{*}t}$

$y(0)=100 \Rightarrow A^{*}=100$

$y(1)=400 \Rightarrow 400=100e^{k^{*}} \Rightarrow 4=e^{k^{*}} \Rightarrow k^{*}=\ln 4$

$y(1/2)=100e^{(1/2)\ln 4}=100(e^{\ln 4})^{1/2}=100(4)^{1/2}=200.$

2. a） 由 $dT/dt=kT-km$，可看出不能从 m 中分离出 T，不过写成 $dT/(T-m)=kdt$ * 就很好做了。

b） $m=85°$.

3. a） $S(1)=S_0+rS_0=(1+r)S_0$

$S(2)=S_1+rS_1=(1+r)S_1=(1+r)^2S_0$

$\vdots$

$S(n)=s_{n-1}+rS_{n-1}=(1+r)S_{n-1}=(1+r)^nS_0.$

d） $S(n/m)=(1+(r/m))^nS_0$

$\lim\limits_{m\to\infty} S(n/m)=\lim\limits_{m\to\infty}((1+(r/m))^m)^{n/m}S_0=\lim\limits_{m\to\infty}(e^r)^{n/m}S_0$

故 $S(t)=S_0e^{rt}.$

4.
$$y_0/2=y_0e^{-t/8\,000}$$

$$\ln 0.5=-t/8\,000$$

故 $\therefore t\approx 5\,600\text{yr}.$

5. $y/y_0=e^{-t/8\,000}$. 在1868年，$t=31\,868$表示公元前30 000年，$t=21\,868$表示公元前20 000年。

$$e^{-31\,868/8\,000} < \text{lab}y/y_0 < e^{-21\,868/8\,000}$$

$$e^{3.5835} < \text{lab}y/y_0 < e^{-2.7335}$$

---

* 原文此处为“ $dT/(T-m)+kdt$ ”，有误。——译注

$$\text{约}\underbrace{0.019}_{1.9\%} < |\mathrm{ab}y/y_0| < \text{约}\underbrace{0.065}_{6.5\%}.$$

6. $T=20+80(1/2)^{t/20}$. $T=30°$时，$t=60\text{min}$.（设$t=0$时，水沸腾，$T=100°$，$t=20$时，$T=60°$.）

7. 你先要问一下你的朋友房间的温度 R 是多少。然后由 $dT/dt=-k(T-R)$ 解出 $T-R=Ce^{-kt}$. $t=0$时，$T=212$，故 $T-R=(212-R)e^{-kt}$*，当$t=?$时，$T=185?$ 你仍然被卡住，因为你不知道 k. 你还得向他询问更多的信息。除非他能回忆起诸如"那天我打了半小时的电话，这悬壶的水就冷到了95°……，"也许最好的办法就是给他一支新的温度计。

8. $T=60+40(3/4)^{t/3}$.

   a) 6min 后，$T=82.5$℃.

   b) 75°时，$T=10.2\text{min}$. 61°时，$T=38.5\text{min}$.

9. 显然，这不是周围介质保持常温的情况，因此需要对例4中的牛顿冷却定律作一些改进。如果你不是物理学方面的专家，请不要忽视下面的所有分析——稍考虑一下，哪些事情或许是有意义的。应该认识到体积是要考虑的，因为体积小者（1oz 的热水）变凉显然（直观地看）比体积大者（100oz 溶液）变热要明显。基于这一点，你可做一个假设。假设得正确与否，就看当周围的介质足够大以至于可以认为保持常温时，它是否能化为例4的牛顿模型。

   具有有限体积和不同温度的物体相遇时，热流守恒。实验中发现，热流与温差成线性比。

   这意味着

$$\underbrace{\frac{d}{dt}(V_1T_1)}_{T_1\text{下降，导数将为负}} = -\underbrace{\frac{d}{dt}(V_2T_2)}_{T_2\text{上升，导数将为正}} = k(T_2-T_1).$$

   如果你设想到这一点，你同意这看上去是合理的吗？任何一本初等物理课本中，在热流或热传导部分你都将能找到有力的证据。

   在本问题中，$V_1=1\text{oz}$ 及 $V_2=100\text{oz}$，都是常量。故有

$$dT_1/dt=-100dT_2/dt=k(T_2-T_1).$$

因 T_1和 T_2均为t 的函数，这是关于 $T_1(t)$和 $T_2(t)$的两个微分方程的一个简单方程组。关于对这个方程组求解的详细过程，已超出了本章内容的范围（尽管方程组的建立没有超出范围）。答案是

$$T_2=(1\,090/101)(1-e^{-kt})+10e^{-kt}.$$

---

* 原文此处为 $T-R=212e^{kt}$，有误。应为 $T-R=(212-R)e^{-kt}$. ——译注

10. 体积由r^3而定，表面积由r^2而定。从而表面积依赖于$V^{2/3}$. $V=k_1r^3$, $S=k_2r^2=k_2\left(\sqrt[3]{k_1r^3}\right)^2=kV^{2/3}$. 求微分，$dV/dt=-cV^{2/3}$（负号说明$V$减少）。由分离变量法得，

$$3V^{1/3}=-ct+Q$$
$$V=((-ct+Q)/3)^3$$

当$t=0$时，$V=V_0$，故. $V=(-(c/3)t+V_0^{1/3})^3$.

11. 设S=盐的数量，速度=抽入－排出。

$dS/dt=(0\text{lb/gal})(2\text{gal/min})-((S/100)\text{lb/gal})(2\text{gal/min})=-S/50$,

$S=ke^{-(1/50)t}$,

当$t=0$时，$S=20$，故

$$S=20e^{-0.02t},$$
$$S(60)=20e^{-1.2}.$$

12. dz/dt = 流入－流出

$=(r_1\text{gal/min})(c_1\text{lb/gal})-(r_2\text{gal/min})(z\text{lb}/(V_0+(r_1-r_2)t\text{gal}))$

$=r_1c_1-\dfrac{r_2z}{V_0+(r_1-r_2)t}$.

$t=0$时，$z=C_0$. 用它们求出积分常数。问题要求的是

$$\frac{z}{V_0+(r_1-r_2)t}=0.30C$$

时的t，其中$z/(V_0+(r_1-r_2)t)$为流出的浓度。

13. $dS/dt=rS$, $S=S_0e^{rt}$. 当存款加倍时，$t=16$意味着

$$2S_0=S_0e^{16r},$$
$$2=e^{16r},$$
$$r=(\ln 2)/16=0.0433=4.33\%.$$

14. 微分方程及其解在t的整数值处都不连续。

$$\frac{dS}{dt}=\begin{cases}rS, & t\neq n\\ rS+A, & t=n\end{cases}$$

$$S(t)=S_0e^{rt}+Ae^{rt}\left(\frac{1}{e^r}+\frac{1}{e^{2r}}+\cdots+\frac{1}{e^{kr}}\right),$$

其中k是小于t的最大整数，$t>1$（对于$0\leqslant t<1$，$S=S_0e^{rt}$）.（参看图1.2.）

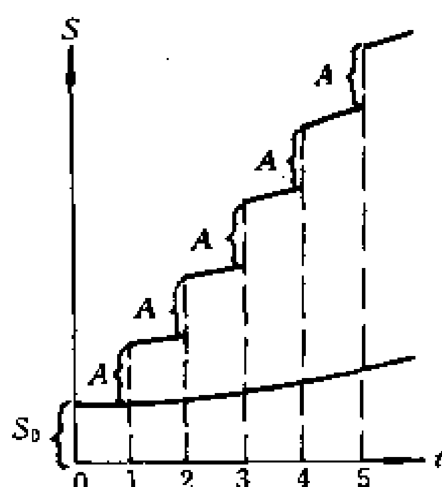


图1.2 下面的曲线表示 $A=0$ 时的固定复利帐(本金没有年增长)。上面的阶跃函数表示对于这种帐的 $S(t)$ 的图像，$A\neq 0$. 每个顶点处的跃度 $=A$.

15. S=盐的数量

$$dS/dt = \text{流入} - \text{流出}$$

$$= \left(2\,\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(3\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right) - \left(\frac{S}{10}\cdot\frac{\text{lb}}{\text{gal}}\right)\left(3\,\frac{\text{gal}}{\text{min}}\right)$$

$$= 6 - \frac{3}{10}S,$$

$S=20(1-C^{-(3/10)t})$;

$S(0)=5$;

故 $C=3/4$.

$$\cdot S = 20(1-(3/4)e^{-(3/10)t}).$$

a) 8min 后，浓度 $=S(8)/10=2(1-(3/4)e^{-2.4})$lb/gal.

b) 长时间后，当 $t\to\infty$ 时，箱内 $S\to 20$lb.

16. 设 $N(t)$=现存的中子数。则 $dN/dt=kN$，故 $N(t)=N_0e^{kt}$.

$$\left(\frac{N_2}{N_0}\right)^{T_1} = \left(\frac{N(T_2)}{N_0}\right)^{T_1} = (e^{kT_2})^{T_1} = (e^{kT_1})^{T_2} = \left(\frac{N_1}{N_0}\right)^{T_2}.$$

17. 设 $P(t)$=箱内污染物的数量，

$$dP/dt = \text{流入} - \text{流出}$$

$$= \underbrace{(2\text{oz/gal})(500\text{gal/min})}_{\text{流入}}$$

$$- \underbrace{(P\text{oz}/10\,000\text{gal})(500\text{gal/min})}_{\text{流出}}$$

$$-\underbrace{0.02P\text{oz/min}}_{\text{处理掉的}}$$

于是 $dP/dt=1\,000-0.07P$ 及 $P=(10\,000/7)(1-ce^{-0.07t})$.

当 $t=0$时,$P=0$,故 $C=1$.

18. 同例8,

$$\overbrace{-\pi\left(\frac{h}{\sqrt{3}}\right)^2 dh}^{\text{水面改变量}} = \overbrace{0.5\sqrt{2gh}\,dt}^{\text{洞口流量}}$$

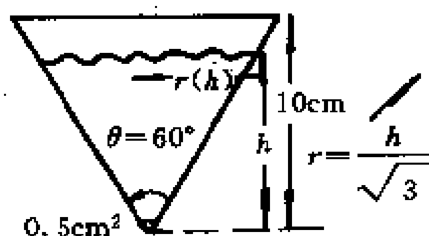


图 1.3

$$h^{3/2}dh = -(1.5/\pi)\sqrt{2g}\,dt$$

$$\int_{10}^{0} h^{3/2}dt = -(1.5/\pi)\sqrt{2g}\int_0^T dt$$

$$(2/5)h^{5/2}]_{10}^{0} = -(1.5/\pi)\sqrt{2g}\,t]_0^T$$

$$-(2/5)(10)^{5/2} = -(1.5/\pi)\sqrt{2g}\,T$$

$$T=(2\pi/(7.5\sqrt{2g}))(10)^{5/2}s.$$

19. 设 $y_1(t)$和 $y_2(t)$分别为 t 时刻第一只和第二只箱内盐的数量,单位为lb. 第一只箱:

$$dy_1/dt = \text{流入} - \text{流出}$$
$$=(0\text{lb/gal})(2\text{gal/min}) - ((y_1/100)(\text{lb/gal}))(2\text{gal/min})$$
$$=-y_1/50,$$
$$y_1=Ce^{-t/50};$$
$$y_1(0)=50;$$
$$\cdot\ y_1=50e^{-t/50}.$$

第二只箱:

$$dy_2/dt = \text{流入} - \text{流出}$$
$$=((y_1/100)(\text{lb/gal}))(2\text{gal/min})$$
$$-((y_2/100+t)(\text{lb/gal}))(1\text{gal/min})$$
$$=e^{-t/50}-y_2/(100+t).$$

像解带积分因子的线性方程那样,

$$y_2=k-50(150+t)e^{-t/50}.$$

$y_2(0)=50$,于是 $k=12\,500$. ·流出第二只桶的水中盐的浓度

$$\frac{y_2}{100+t}=\frac{12\,500}{100+t}-50\left(\frac{150+t}{100+t}\right)e^{-t/50}.$$

20. $G(t)$＝葡萄糖浓度，

A＝葡萄糖注入的速度，单位：mg/min，

速度＝输入－输出，

$$\frac{dG}{dt}=\frac{A}{V}-KG \quad \text{（递减速度与 } G \text{ 成比例）。}$$

$$\uparrow \qquad \uparrow \qquad \uparrow$$

$$\frac{\text{mg/cm}^3}{\text{min}} \quad \frac{\text{mg/min}}{\text{cm}^3} \quad \left(\frac{1}{\text{min}}\right)\frac{\text{mg}}{\text{cm}^3}$$

要回答所问的问题，毋须解此微分方程。

在平衡状态下，浓度 G 是个常量，不作更大的变化，即 $dG/dt=0$.

$$\frac{dG}{dt}=\frac{A}{V}-KG=0$$

其中 $G=A/KV$ 就是平衡浓度。仍然不用解，你就可以从这个微分方程中看出 $G>A/(KV)$ 给出负的 dG/dt（G 递减），$G<A/(KV)$ 给出正的 dG/dt（G 递增）。$G(t)$ 的解必定像图1.4所示的那样（对应于不同的积分常数值，有不同的解曲线）。注意到，如果

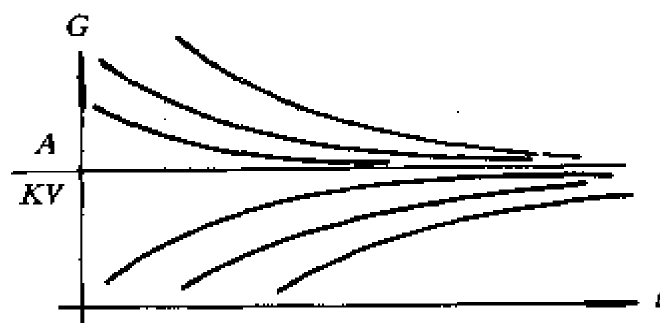


图 1.4

$$\frac{dG}{dt}=\frac{A}{V}-KG$$

则

$$\frac{d^2G}{dt^2}=-K\frac{dG}{dt}=-K\left(\frac{A}{V}-KG\right),$$

当 $G>A/(KV)$ 时为正（则 G 是向上凹的），当 $G<A/(KV)$ 时为负（则 G 是向下凹的）。这样，这些解曲线就进一步得到证实。（实际解：

$$G=(A/(KV))(1-e^{-kt}).）$$

21. 合理的可变体积模型：V 不再是常量，S 为每分钟注入的溶液的体积：

$$V = V_0 + St.$$

$$\text{cm}^3 \quad \text{cm}^3 \left(\frac{\text{cm}^3}{\text{min}}\right)^{*} \quad \text{min}$$

在 S 与 A 之间存在一种关系：在注入的溶液中，葡萄糖的浓度为一常数

$$\frac{A}{S} = \left(\frac{\text{mg/min}}{\text{cm}^3/\text{min}}\right)\text{葡萄糖溶液} = \frac{\text{mg}}{\text{cm}^3} = C.$$

故 $V = V_0 + (1/C)At$，练习20中的微分方程变成

$$\frac{dG}{dt} = \frac{A}{V_0 + \frac{A}{C}t} - kG_0.$$

现在 G 没有平衡状态，因为没有这样的常数 G 使得 $dG/dt = 0$.

如果像练习20那样对这个模型求解或对解进行讨论，势必会出现混乱。和许多微分方程一样，数值逼近看来是唯一可行的求解方法。不过就这个问题而言，你很可能会怀疑对变化的体积作全面考虑的价值，因为它并不给出任何直接的物理解释。

进一步考虑可变体积后，你将明白 B 实际上不可能这样无限地增加——人体的容量是有限的，静脉中液体的体积不可能无限增长。另一种机理，如排尿，将使体积保持协调，因此你需要问一下医学或生物学专家有关这种体积变化的实际极限：葡萄糖液可注射多长时间；实际上是否能得到平衡浓度等。这个问题可参考 Defares 和 Sneddon 的《医学生物数学》(The Mathematics of Medicine and Biology)(Chicago: 1961.)** 基中提供了一些数据。

22. 设 y 是 B 的浓度，A_0 为 A 的初始浓度：

$$dy/dt = c(A_0 - y),$$

$$-\ln|\underbrace{A_0 - y}_{\text{总是正的}}| = ct + K,$$

$$A_0 - y = Qe^{-ct}.$$

$$y(0) = 0;\ y(20) = A_0/2,$$

$$Q = A_0;\ e^{-20c} = 1/2,\ \text{故 } c = (\ln 2)/20,$$

$$y = A_0(1 - (1/2)^{t/20}).$$

$$y' = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{正的}}}{c}\ \underset{\substack{\uparrow \\ \text{正的}}}{(A_0 - y)},$$

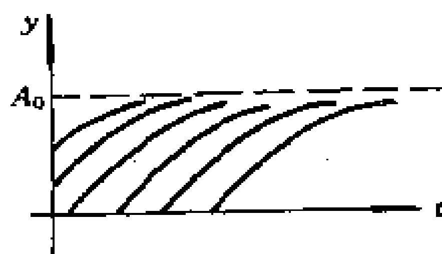
---

* 原文中误为 cm^2/min. ——译注

** 他们提到了 S. G. Jokipii 等的文章，J. Clin. Invest., Vol. 34, 1954, pp. 331, 452, 458.

$$y'' = -cy' = \underbrace{\underbrace{-c^2}_{\text{负的}}\underbrace{(A_0 - y)}_{\text{正的}}}_{\text{总是负的}}$$

y 向下凹。$y' = c(A_0 - y)$ 的解族如图1.5所示。



family of solutions to $\frac{dy}{dt} = C(A_0 - y)$

图 1.5

23. C_T = 溢出液体中的浓度 = 任意时刻 T 试管中培养基的浓度。

所以，VC_T = 在时刻 T 试管中培养基总数。

变化率 = 输入 − 溢出

$$\frac{d}{dt}(VC_T) = \left(R\frac{ml}{h}\right)\left(c_i\frac{mg}{ml}\right) - \left(R\frac{ml}{h}\right)\left(\frac{VC_{T_{mg}}}{Vml}\right).$$

V, R 及 C_i 均为常数，故

$$V dC_T/dt = RC_i - RC_T,$$

或

$$\frac{d}{dt}C_T = \frac{R}{V}(C_i - C_T).$$

通过分离变量求解（在"公式"中利用 $T - T_0$，这提醒我们，定积分可能使我们很快得到结果）：

$$\int_{c_0}^{C_T} \frac{dC_T}{C_i\left(1 - \frac{1}{C_i}C_T\right)} = \int_{T_0}^{T} \frac{R}{V} dt$$

$$-\ln\left|1 - \frac{C_T}{C_i}\right|\Bigg]_{C_0}^{C_T} = \frac{R}{V}t\Bigg]_{T_0}^{T}$$

$$\ln\left|1 - \frac{C_T}{C_i}\right| - \ln\left|1 - \frac{C_0}{C_i}\right| = -\frac{R}{V}(T - T_0)$$

$$\left|\frac{1 - \frac{C_T}{C_i}}{1 - \frac{C_0}{C_i}}\right| = \exp\left[-\frac{R}{V}(T - T_0)\right].$$

由于绝对值符号，结论式只有当$C_T>C_i$及$C_0<C_i$或$C_T<C_i$及$C_0<C_i$时才有效。这对恒化器似乎没有必要，但在实际中却可能要考虑。

$$C_i - C_T = (C_i - C_0)\exp\left[-\frac{R}{V}(T-T_0)\right]$$

$$C_T = C_i - (C_i - C_0)\exp\left[-\frac{R}{V}(T-T_0)\right].$$

这的确可证明是等于

$$C_0 + (C_i - C_0)\left(1-\exp\left[-\frac{R}{V}(T-T_0)\right]\right).$$

24. 揭示：注意铲雪者的移动速度，它与任意时候落在某处的雪的体积成反比。答案：午前$\sqrt{5}-1$h.

教 师 参 考

目的 对许多学生来说，把需要微分方程的应用题转换成数学术语，似乎比迄今所遇到过的问题要难。对下面这些事实应予以特别注意。

(1)微分方程是一个瞬时语句，在任何时刻都必须成立。

(2)题中的数字并非都要放到微分方程中去。某些条件必须成立，以提供计算积分常数，或其它参数。如比例系数等的必要条件。

(3)给微分方程中的每一项赋予物理量纲，这是基本的，但通常并不自动完成。

(4)条理的书写清楚的框架对学生是有帮助的，并且对那些须看他的工作的人也是必要的，

预备知识 尤其需要初等微积分。

(1)熟习微分法和基本积分法；

(2)对简单的微分方程及其解法有一些经验。

时间 举些不同的例子，用一个课时的一部分就足够了。下一次课可以在学生做了练习之后，就他们遇到困难的问题进行讨论。

注 这一章已用于第三学期的微积分和微分方程课程中，那

里注重的是数学的应用性。对生物或社会科学专业的学生以及数学或物理基础较薄弱的人，另写有专门的材料。这一章主要是为这些学生独立地使用而写的，它的注意力是建立数学模型，不是它们的解；一些比较困难的练习（标有剑号）就是为此目的而选进来的。

第 2 章

一阶微分方程定性解的图示

Beverly Henderson West *

1. 引　　言

如本章中阐述的，对解的定性描述，可以得到关于所给微分方程 $y'=g(x,y)$ 的非常有用的信息。特别是，它通常使你能够考察在 $x\to\infty$ 时 y 的极限过程或远期的情况，而毋须给出解的明确表达式。通常，我们并不需要明确的解，或者在技术上求解有困难，或者在初等函数(多项式、三角函数、对数函数、指数函数)范围内，解根本不存在。在这种情况下，定性的近似解或许就是一粒救命丸——或至少是一种有效的办法。回忆一下，微分方程 $y'=g(x,y)$ 有一个具有形式 $y=f(x)$ 的完整的解族。积分常数的不同值给出了族中的不同解，如 $y'=1$ 的解族是 $y=x+c$(参看图2.1)。对特定的问题，c 的值可由所给条件 $f(x_0)=y_0$ 来确定，它决定了族中哪一个是问题的解。不过，我们并不期待明确的解，更不要谈特解了，因此，我们只是对每个微分方程的**解族**作图示。

在初等微积分中，你学习了如何利用导数绘制函数图形。现在

* Departmeat of Mathematics, Cornell University Ithaca, NY 14853.

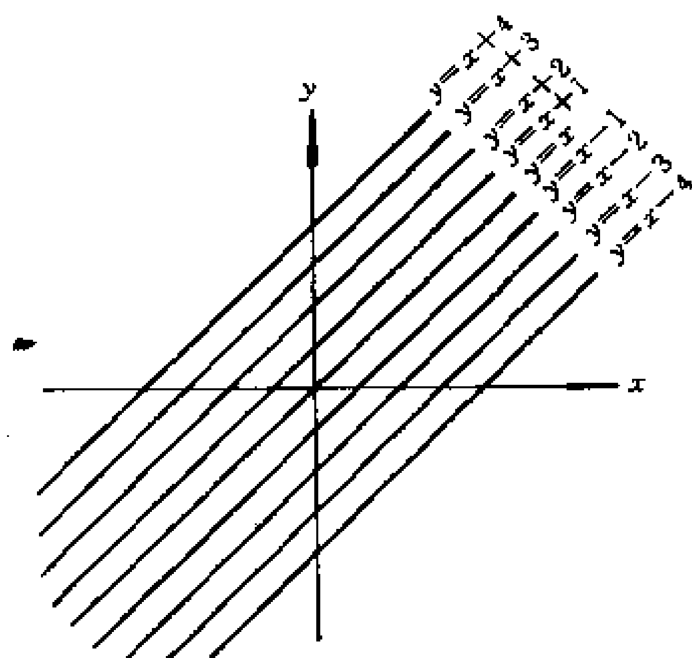


图 2-1

我们要利用这些技法，并要展示，在没有明确的方程式 $y=f(x)$ 的情况下，这些技法是如何帮助你讨论问题的（第2～4节）。进一步，我们还将看到，从这些叙述中可以引出很多关于解的平衡和稳定性的外加信息（第5节）。

2. 方 向 场

如果一个一阶微分方程能够写成 $y'=g(x,y)$ 的形式，那么我们就能够确定其解 $y=f(x)$ 在任意点 (x,y) 处的斜率。从图像上看，给出一些平面点，那么通过每一点，我们就可以画出一条短线，它具有该点处准确的斜率。这个图称作**方向图**或**方向场**。

例1　考虑

$$dy/dx=-xy. \tag{1}$$

起初，你或许要做些简单的计算，如下表。

计算再稍许精确些，并注意到如下事实，就能够继续绘出方向

场。

	x	y	$y'=\frac{dy}{dx}=-xy$
如果 $x=0$，或 $y=0$，$y'=0$，	0	任意	0
则沿着两条坐标轴的方向线都是水平的	任意	0	0
如果 $x=1$，$y'=-1$，故	1	1	-1
	1	2	-2
如果 $x=1/2$，$y'=-y/2$，故	1/2	1	$-1/2$
	1/2	2	-1

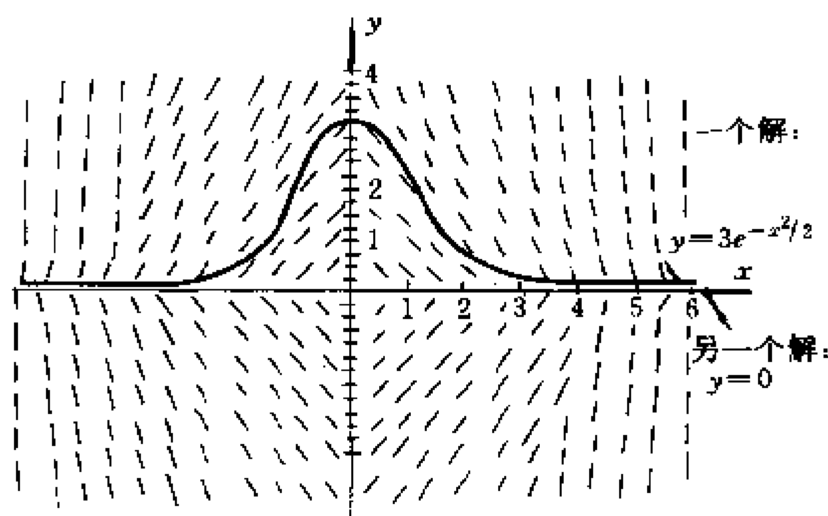


图 2.2

(1)存在关于原点及两根坐标轴的对称性，因此，考虑了第一象限的详细情况后，其它三个象限的情况也就清楚了。

(2)对于固定的 x，斜率随 y 的增加而变陡。

(3)对于固定的 y，斜率随 x 的增加而变陡。

这样，你就可以很快地描绘出方向场(图2.2)。

像这样的方向场，它给出了关于微分方程的所有可能的解族的直观表示。任何一个解必定与满足该解的点的方向线相切。通常，解族中的解可以表示成 $y=f(x)$的形式，每一个解具有不同的

积分常数值。例如，(1)的通解实际上是 $y=\alpha\exp[-x^2/2]$，在方向场中，我们画出了 $\alpha=3$的解，这样，你可以看到它是如何与图中的所有方向线相符合的。通过分离变量，很容易得到实际的解：

$$
\begin{aligned}
y' &= -xy, \\
\int \frac{\mathrm{d}y}{y} &= \int -x\mathrm{d}x, \\
\ln y &= -x^2/2 + c, \\
y &= e^{-x^2/2+c} \\
&= e^c e^{-x^2/2} = \alpha e^{-x^2/2}.
\end{aligned}
$$

3. 关于唯一性定理

当唯一性定理适用于一阶微分方程时，通过任意点(x,y)就只能有一个解，因此**没有两个解会相交**。当你想图示一个解族时，这是极其有用的信息。例如，在例1中，这意味着在这个方向场中，**仅有一种**解族图，如图2.3所示。

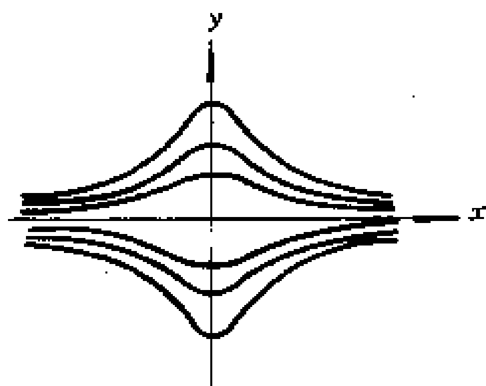


图 2.3

现在你会想知道"唯一性定理什么时候适用?"最接近的简单答案就是"通常"对一阶常微分方程都适用。数学上的精确叙述是相当复杂的。任何关于微分方程的初等教科书都致力于这类方程，并且将叙述如下这样的定理。

定理 对于初始条件为 $y(x_0)=y_0$的一阶微分方程 $y'=g(x,y)$，存在唯一解 $y=f(x)$的充分(虽不是必要的)条件是，g 及$2g/2y$是实的、有限的、单值的、并且在包含(x_0,y_0)的某个矩形平面域上连续。

在初等教科书中很少证明这样的定理。一个值得注意的例外就是 Martin Braun 著的《微分方程及其应用》(Defferential Equations and their Applications)(New York:Springer-Verlag,1978,2nd ed.)在1.10章中,Braun 就唯一性和存在性问题作了极好的讨论,并给出了证明,这些论述对任何知道一点简单的初等微积分的人来说都是容易接受的。可以看出,在任何情况下,对于带有初始条件的微分方程 $y'=g(x,y)$,其解的唯一性标准粗略地说就是 g 和 $2g/2y$ 是"美好的"。我们将考察几个这样的情况。

4. 解的图示

由第2和第3节我们已得到两个图示一阶微分方程 $y'=g(x,y)$ 解的准则:

(1)解必须与方向场相符合;

(2)对大多数解来说(如具有连续的 g 和 $2g/2y$ 的解),唯一性告诉我们,任意两个解都不会相交。

在你考察下面这个例子的时候,请记住这些准则。

例2 考虑最简单的人口增长假设,按人口计算的增长速度为一常数。这意味着,$N(t)=$人口数,是时间的函数

$$\frac{1}{N}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r=\text{常数。} \tag{2}$$

为了很快得到可能的解的定性图形,把(2)式重写成

$$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=rN,$$

并考虑 $N(t)$ 的图形特性。

对这个实际问题,只须讨论 $N>0,t>0$. 可以看出,$N=0$时,斜率$=\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=tN=0$,而且当 N 增加时斜率也增加。立刻,你就证明了解就像图2.4所近似地表示的那样。

这种粗略的图示是令人十分满意的,它清楚地显示了,对所有

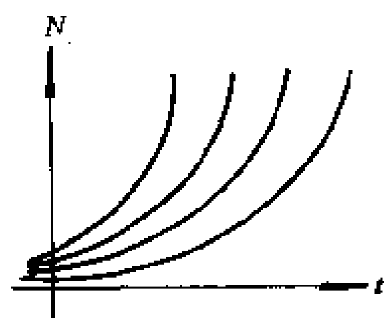


图 2.4

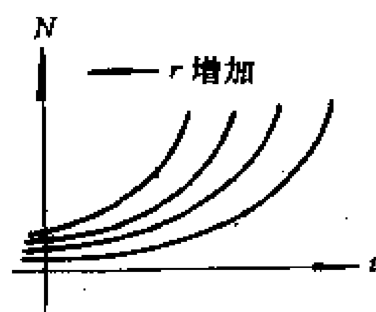


图 2.5

的解，N 不断地加快上升且无止境。通过解出（2），$N = N_0\exp[rt]$，你可以很容易地证实这个图示是正确的。

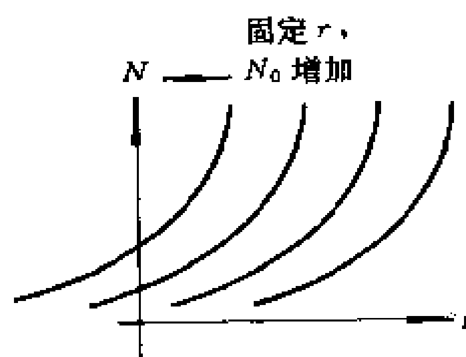


图 2.6

请注意另外两个事实，它们将给出更准确的图像并阐明 r 与 N_0的作用：r 的影响是，对于给定的 N，r 增加时斜率也增加（图 2.5）。在本章中，我们把微分方程中的常数都看作是固定的，只图示由不同的积分常数产生的解族。对一个给定的 r，考察一个给定的 N. 由于在 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 中没有明确的 t，因此就这个 N 来说，对于所有的 t，斜率相同。从而，所有的解曲线都是互相平移的（图2.6）。

例3　定性地考虑一下，当上例中(2)式的基本假设修改为由于拥挤，人口增长率递减，这时会发生什么情况。Verhulst Pearl 给出一个简单的改进式

$$\frac{1}{N}\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\left(1 - \frac{N}{k}\right) \tag{3}$$

这里，人口增长率$(1/N)(\mathrm{d}N/\mathrm{d}t)$* 由于与总人数 N 成比例的拥挤项而线性递减。正数 r 仍表示没有出现拥挤时($N=0$)的人口增

* 原文此处误为 $(1/N)/(\mathrm{d}N/\mathrm{d}t)$. ——译注.

长率。

为了从图像上考察解，把上式写成

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN\left(1-\frac{N}{k}\right)=\text{斜率。}$$

可以看出，对于 $N=0$和 $N=k$，斜率为零(平行的)。还可以证明，$0<N<k$ 时，斜率为正，$N>k$ 时，斜率为负，不过这些信息还不够，我们还不能作出不相交的图解(对于唯一性)。参看图2.7.

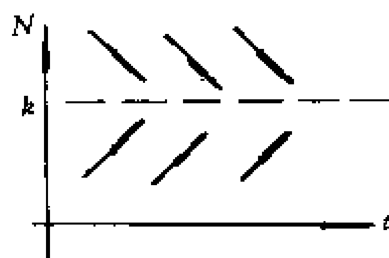


图 2.7

由微积分给出的另一种作图技巧就是凹性的确定，它依赖于二阶导数。对此例可以得到：

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\\&=r\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{N}{k}\right)+rN\left(-\frac{1}{k}\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\right)\\&=r\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{N}{k}-\frac{N}{k}\right)\\&=r\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}\left(1-\frac{2N}{k}\right).\end{aligned}$$

我们想知道在哪些点处二阶导数为0，为正或为负。把 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 与 $(1-(2N/k))$考虑为两个因子(与正数 r 相乘)，可以证明，$N=0,k$ 或 $k/2$时，$\mathrm{d}^2N/\mathrm{d}t^2=0$；而对于 $N<k/2$或 $N>k$，二阶导数为正(N 向上凹)；对于 $k/2<N<k$，二阶导数为负(N 向下凹)。

所有这些信息拟合在一起显示在图2.8中。

在 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t$ 中没有明确的 t，于是又得出(对固定的 r 和 k)，就所给的 N，对一切 t，斜率相同。因此，全部解曲线都可以互相平移。

由于变量分离后的(3)式不能用简单的积分法求解，这样我们

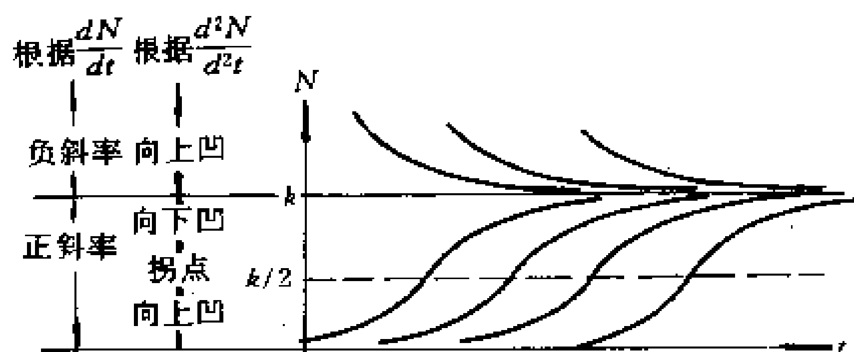


图 2.8

就进入了图示技术显示其价值的领域。(方程(3)可用部分分式积分法求解,或通过变换 $M=1/N$,给出关于 M 的一阶线性微分方程。练习22还出人意外地表明,这个模型与美国1790—1910年的人口数据非常吻合。)

具有形式(3)的方程经常出现,通常称之为**逻辑方程**。这就是说,具有形式 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x(a-bx)$ 的方程叫做逻辑方程,并且我们知道其解具有图2.9所示的形式。

这些例子把我们引导到对一般近似法的阐述。我们曾将一阶和二阶导数的有关信息结合起来,绘出图像解。这个解近似地显示了精确的斜率和凹性。(这个过程可比喻为用"法网鉴别器"对罪犯进行复合描绘。你可以把下面的作图过程看作为一个图像解的描

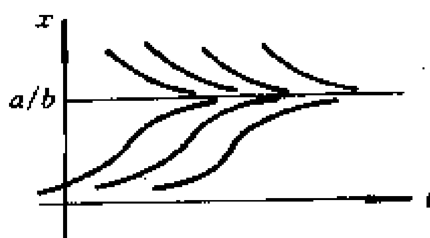


图 2.9

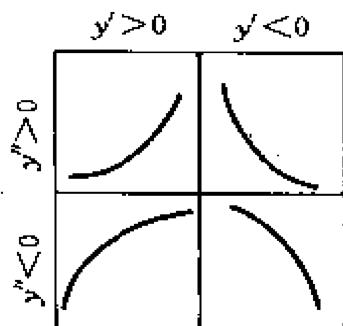


图 2.10

绘鉴别器。)图2.10展示了弧的四种基本类型。问题很简单,就是确

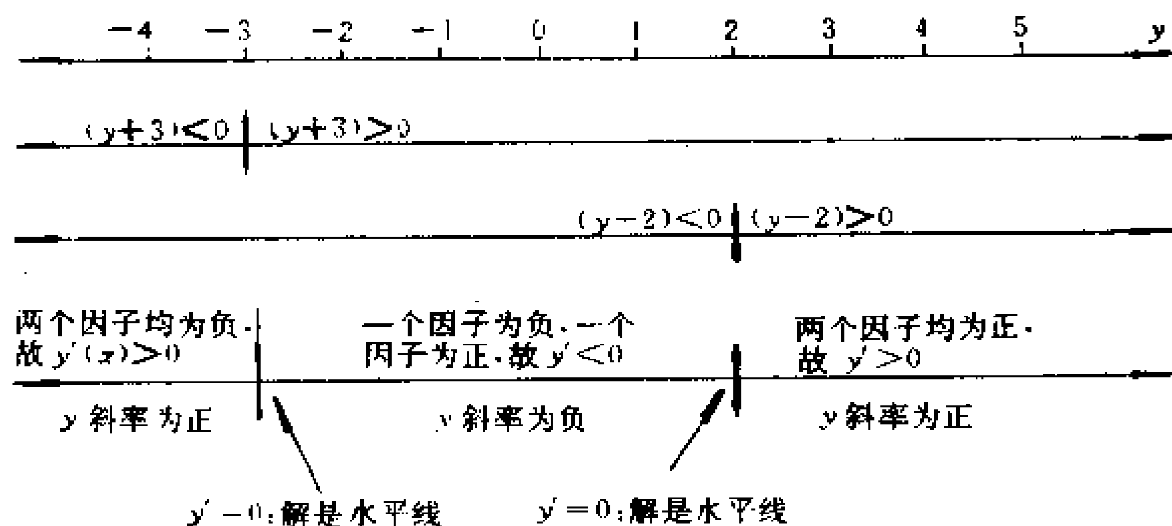
定哪些弧在坐标平面的何处。下面的例子很好地说明了这个过程。

例4 图示下述微分方程的一些解。

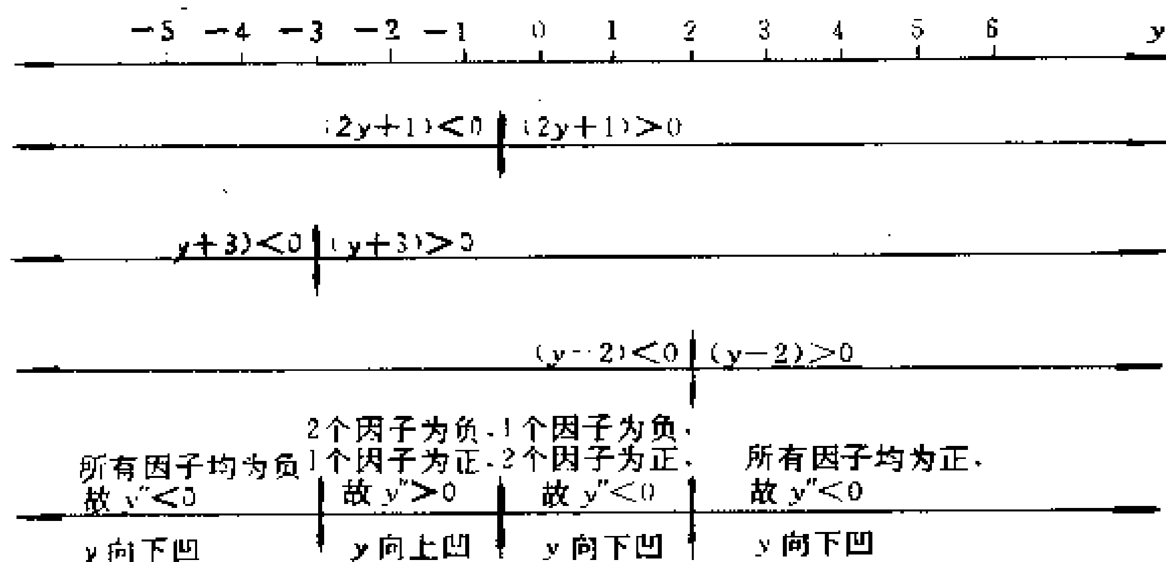
$$y' = (y+3)(y-2). \tag{4}$$

应近似地显示出正确的斜率和凹性。

(1)考察 y'(斜率):$y'=(y+3)(y-2)$是两个因子的乘积,因此需要确定因子的正负性,你可以把它们直接与一根数轴(y 轴)联系起来,如下图所示。



(2)考察 y''(凹性):对(4)式运用隐函数微分法和乘法规则



$$
\begin{aligned}
y''(x) &= y'(y-2)+(y+3)y' \\
&= (2y+1)y' \\
&= (2y+1)(y-2)(y+3).
\end{aligned}
$$

再运用数轴讨论这三个因子的乘积。

(3)综合：作出水平线 $y=-3$ 和 $y=2$. 根据(1)与(2)所提供的信息在坐标平面上绘出 y' 或 y'' 发生变化之处的草图——本例中是 $y=-3$, $y=-1/2$, $y=2$ 等处。然后绘出正确的曲线段。图2.11给出了全部结果。

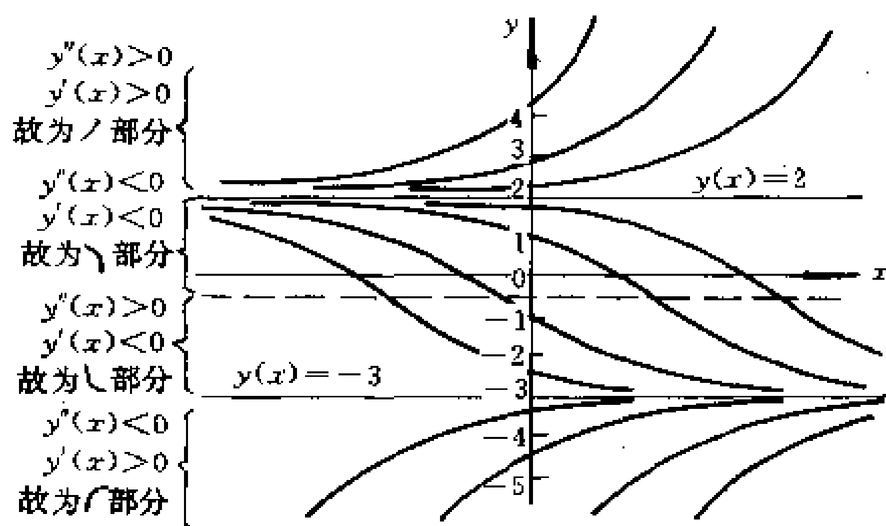


图 2.11

下面，我们就上述关于例4的解的图示作些说明。

(a)在↘段与↘段相遇处，有一个拐点。

(b)解曲线一定逐渐趋于平衡状态，因为过同一点不能有两个解(两条解曲线不可能相交)。*

(c)再则，若 y' 中没有明确的 x，那么，解曲线平移后仍是解曲线。

(d)如果需要的话，利用微分方程(4)，我们可以准确地计算出

* 这条理由是不成立的。事实上，对于 $y>2$ 的解并不趋于平衡。——译注。

任意点的斜率。不过，我们甚至不需逐点描绘出方向场就能够作出这样美妙的图像。

你可以自己把最后这个例子的详细过程整理一下，不过首要的是(1)，(2)，(3)这几个关键步骤，由它们能获得理想的图示解。在下一节里，我们将检验这些图示，看看它们告诉了我们些什么。

5. 平衡与稳定性的讨论

微分方程的平衡解，就是不变化的解，也就是常数。这就是说，平衡解是使得对一切实数 x，$y'=g(x,y)\equiv 0$ 或 $y=f(x)\equiv c$ 的解。在例4中，$y=-3$ 和 $y=2$ 都是平衡解。

平衡态可分为稳定的和不稳定的。下一个实例或许有助于区别这两种情况。考虑两个锥体，一个以面而立，另一个以尖而立(图2.12)。两个锥体都处于平衡状态：它们位置不再变化。如果你用手指稍微晃动一下左边的锥体，它会迅速回到初始位置。这是一种稳定的平衡态。但是，若晃动右边的锥体，它随即就会例下，这说明这个平衡是不稳定的。

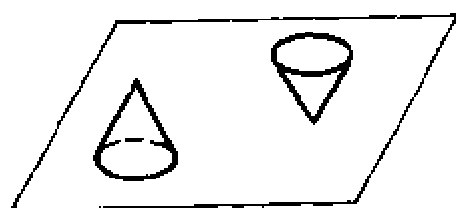


图 2.12

例4的图像表明，在 $y=-3$ 处是稳定的平衡，而在 $y=2$ 处是不稳定的平衡。这实际上意味了什么呢?下面给出关于这种不稳定平衡的一种可能的解释。假设 $y(x)$ 表示在时刻 x 一只盘子上细菌的数量，以百万为单位。假设你有一只盘子，在时刻 x_0 盘子上有20 000 000个细菌。于是你有平衡解 $y(x)=2$. 如果某人在时刻 x_0 对着盘子打喷嚏，使细菌一下增加到2 000 126个，于是你就得到一个 $y'>0$，$y''>0$的解，这时细菌的数量急剧地增加。类似地，如果

在时刻 x_0 消除了617个细菌，这时的细菌总数为1 999 383，它将由一个 $y'<0$，$y''<0$ 的曲线来表示，并且随着时间的流逝，细菌数将减少。所以，当我们轻轻搅动或干扰平衡解 $y=2$ 时，状态就会剧烈地变化，新的状态决不会回到 $y=2$.

另一方面，如果一个系统在稳定平衡态附近受到干扰，如例3中在 $N=k$ 附近，它总是企图回到平衡态。人口的总数总是企图保持在 $N=k$ 的水平，而对于总数 N 接近 k 的情况，它将向 $N=k$ 的水平靠近。这种稳定性问题在许多应用问题中是至关紧要的(参看练习5～8、17、18)。

现在该你动手了。再说一遍，本章的目的是教你如何解决问题，而不是显示有人能够做什么。试着做一下练习1～19中的一些题目。如果卡壳了，就与别人商量商量。当你认为已经解决了其中的一些问题时，试做一下下面的问题。

6. 一个比较困难的例子

例5 描绘

$$y' = 2x - y \tag{5}$$

的解。

在往下面阅读之前，先自己做一下这个问题。那么下面的解释将更易于澄清你的思路，而不会使你的思想混乱或复杂。

(1)考察 y'：

$$y' = 0,\ 对\ y = 2x$$
$$y' > 0,\ 对\ y < 2x$$
$$y' < 0,\ 对\ y > 2x.$$

至此绘出图2.13. 在 $y'=0$ 处，y 不是常数。所以没有平衡态，没有水平解。

(2)考察 y''：

$$y'' = 2 - y' = 2 - 2x + y$$
$$y'' = 0,\ 对于\ y = 2x - 2$$
$$y'' > 0,\ 对于\ y > 2x - 2$$
$$y'' < 0,\ 对于\ y < 2x - 2.$$

此外，再加上(1)中的信息，我们就可以给出图2.14.

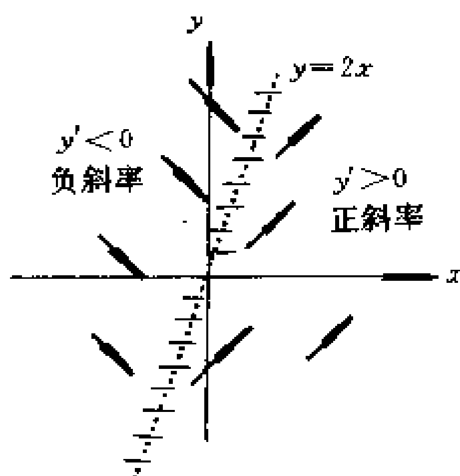


图 2.13

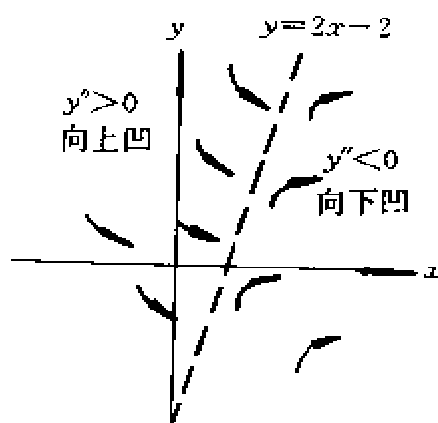


图 2.14

(3)综合：

y	y'	y''	结论
大于 $y=2x$(在其左边)	$-$	$+$	
介于 $y=2x$ 与 $y=2x-2$之间	$+$	$+$	
小于 $y=2x-2$(在其右边)	$+$	$-$	

表格中的结论转化为图像，即为图2.15. 记住，所有部分必须相互吻合，在你确认已讨论完了之前，提几个深入一步的问题。

a) 如果 $y=2x-2$是一条渐近线，图2.15中左边的解将不会相交，而且也不破坏唯一性，是吗？回忆一下，渐近线是一条在 $x\to\infty$时，被逼近但永远达到不了的直线*。如果 $y=2x-2$，则 $y'=2$，也满足原方程(5)，故 $y=2x-2$是一个解，具有定常的斜率2，而其

* 这里一般地要求渐近线"永远达到不了"是不妥当的。——译注

它解决不会与它相交。

b) 在斜率为正的地方会发生什么?在 $y=2x-2$ 右边的解是向下凹的?它们弯曲得有多快?当 $x\to\infty$ 时,它们趋于一个极限吗?

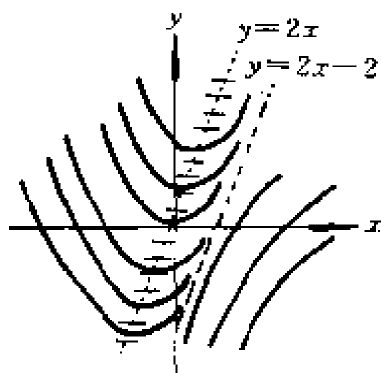


图 2.15

关于这个问题,我们最好还是回到方向场去。我们知道何处 $y'=0$(沿着 $y=2x$)以及 $y'=2$(沿着 $y=2x-2$). 从那里容易考虑:

固定 y,因 $y'=2x-y$,当 $x\nearrow$ 时,$y'\nearrow$(沿着一固定 y 向右移动时,斜率变陡);

固定 x,因 $y'=2x-y$,当 $y\nearrow$ 时,$y'\searrow$(当沿着一条垂直线由上向下移动时,斜率减小)。换言之,你会注意到沿着任意直线 $y=2x+k$,斜率 $y'=2$.

综上所述,我们可以改进最后结果的描述,注意到

$$y=2x-2$$

也是右边解的渐近线。(5)式

$$y'=2x-y$$

的解的图示如图2.16(负的 c 给出渐近线下面的解)。

从广义上讲,直线 $y=2x-2$(它是条渐近线)可以认为是平衡解。其附近的解,当 $x\to\infty$ 时趋向于它。微分方程(5)的准确解为

$$y=C\exp(-x)+2x-2.$$

完全可以肯定,当 $x\to\infty$ 时,$Ce^{-x}\to 0$. 你会注意到,当 x 相当负时,解的主要部分是 Ce^{-x}(即 y 是指数递减);当 x 相当正时,解趋近 $2x-2$(一条直线)。"有趣"的部分就在两者交接之处。

例5说明,像 $y'=2x-y$ 这样的看上去清清楚楚的微分方程,可能会有一个复杂的解族图像。不过,通过考察 y'、y'',运用综合它们的技术直到所有部分都相符合,而且每一件事都明确下来了,就

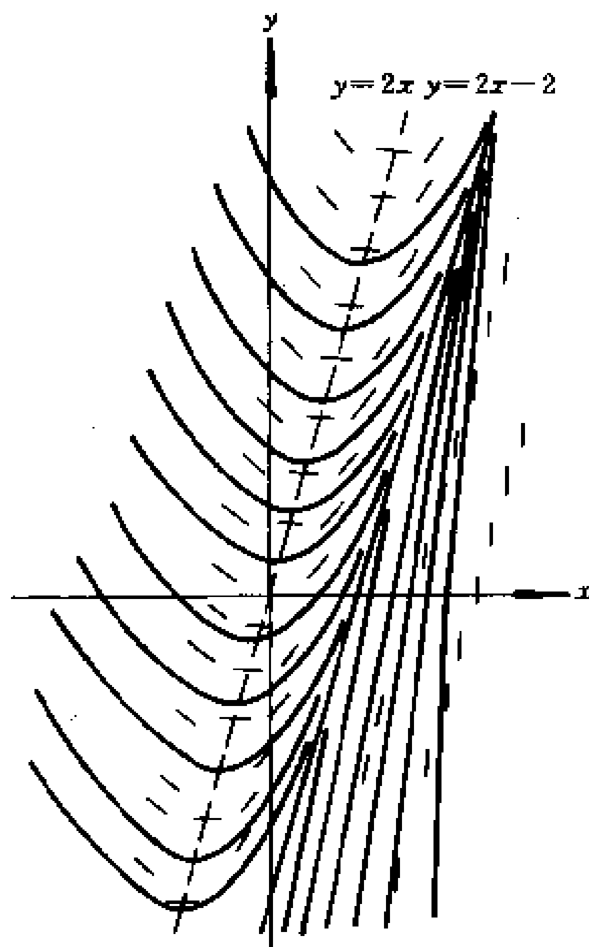


图2.16 负的 C 给出渐近线下面的解

不难得到这个图像。

练 习

(最难的练习标有十。)

对于练习1～4，给出微分方程的图示解。

1. $dy/dx=-y/x$.
2. $dy/dx=y$.
3. $x+y'-1=-yy'$.
4. $y'=2y'/x$.

5. 营养以每单位时间 R 个分子的常速流入一个细胞，并且以与其内营养浓度成比例的速度离开，比例常数为 K。设 N 为 t 时刻的浓度。则上述营养变化速度的数学描述为

$$dN/dt = R - KN;$$

即 N 的变化速度等于营养进入细胞的速度减去它们离开的速度。营养的浓度会达到平衡吗？如果能，平衡解是什么？它是稳定的吗？试用这个方程解的图示解释之。

6. 假设在一所大学，一位普通的新教授以每天一本的速度开始从图书馆借出书，再设图书馆平均一周收回借出的书的1/10. 在任职多少年后的任何时刻，一位普通教授已借多少本书？

7. 假设岛上不断有从大陆来的移民。再假设在 t 时刻，大陆上有 S 种人，岛上有 $N(t)$ 种人。移居到岛上并在那边开拓殖民地的新人种的增加速度，与大陆上尚未移居到岛上的人种数 $(S-N(t))$ 成比例，比例常数为 I. 此外，人种的灭绝速度与岛上的人种数成比例，比例常数为 E. 证明岛上的人种数将达到一个平衡值，它近似地 $=[I/(I+E)]S$. 图示函数 $x(t)$ 的曲线。

8. 设一个摇摆舞狂热迷俱乐部开始活动时 $(t=0)$ 有 N_0 个成员，毫无疑问，这个俱乐部的扩大将与会员人数成比例，但真正对这种音乐感兴趣的最多有 M 个人。因此，当会员人数接近 M 时，速度将减小，因为新成员比较难找到了。所以，实际上增长的速度与成员数和留下来的有兴趣者的人数的乘积成比例，给出包含会员人数 $N(t)$ 的微分方程。假设有关常数在几年内保持稳定，组织者能期待每年出售多少会员证？

图示下列方程的一些解。在你的图示中应展示正确的斜率和凹性并指出拐点。

9. $y' = y^2 - 1$.

10. $y' = y(y-2)(y-4)$

11. $y' = (e^{-x} - 1)y$.

12. $y' = (y-1)(3+y)$. 包括 $y(0) = 1.5$ 处的解。

13. $dy/dx = x(2-y)/(x+1)$，$x>0$，求出所有的平衡点，并区别它们是稳定的还是不稳定的。图示过 y 轴0、1、2和3点的解。注意使这些曲线在 $x=0$ 处有正确的斜率。然而，求 y'' 却是十分复杂的，因此你可以试着抛开它去讨论你的问题。

14. 图示方程 $y' + y^4 = 16$ 当 $y(0) = 0$ 时的解。求出平衡值（如果有的话），说出它们是稳定的还是不稳定的。

15. 图示方程 $y' + y^3 = 8$ 当 $y(0) = 0$ 时解。求出平衡值（如果有的话），并说出它们

是稳定的还是不稳定的。

16. 不用求解微分方程 $y'=x+y$，画出介于 $x=0$ 和 $x=1$ 之间且满足 $y(0)=0$ 的解。确定曲线在原点的正确斜率的凹性。

17. 水以每单位时间 k_1 个单位体积的流速流入一圆锥形水罐，其从罐中蒸发出来的速度与 $V^{2/3}$ 成比例，V 为罐中水的体积，设比例常数为 k_2. 求 V 所满足的微分方程。不解方程，图示其解族。有无平衡态？是否稳定？

18. 一个片子上的一群病菌趋向于繁殖成一个圆菌落。如果 N 是病菌的数目，r_1 是单位成员的增长率，则 $dN/dt=r_1N$，这就是马尔萨斯生长律。不过，处于周界表面的那些病菌由于寒冷而受到损伤，它们的死亡率与其数量成比例，即与 $N^{1/2}$ 成比例。设这个比例常数为 r_2 求 N 满足的微分方程。不用求解。图示其解族。是否有平衡态？若有，是否稳定？

19. 设 $dy/dx=y((1/x)-1)$，$x\geqslant1$，求出所有的平衡点并区别它们是稳定的还是不稳。定的。图示 $y(1)=1$ 和 $y(1)=-1$ 时的解。指出拐点。曲线在 $x=1$ 处的正确斜率和凹性。对一般解 $y(x)$，当 $x\to\infty$ 时会出现什么情况？

+20. 考虑微分方程 $y'=e^x-y$. 不用求解这个方程，图示通过下列点的解：$(0,1)$，$(1,e)$，$(-1,1/e)$，$(0,0)$，$(1,0)$，$(-1,0)$. 除了这些解和坐标轴外，画出 $y=e^x$. 在上述给定的点处，曲线应展示正确的斜率和凹性。写下你的理由。你看到某种形式的稳定解了吗？

+21. 画出曲线 $y(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$，仔细注意斜率、凹性、和初始值 $y(0)$. 提示：利用微积分的基本定理，注意到 $y'=e^{-x^2}$.

间接说明：

22. 解例8中的微分方程 $dN/dt=rN(1-(N/K))$.（分离变量并利用部分分式法，或作代换 $N=1/N$，解这个关于 M 的线性微分方程。）证实解的一种写法为

$$N=\frac{K}{1+\frac{e^{-rt}}{c}}$$

讨论：R. L. Pearl 和 L. J. Reed 曾成功地使用了练习22的公式(Proceedings of the National Academy of Sciences，1920，p. 275)，其结果与所收集的美国人口数据相当吻合，这些数据来自1790年到1910年间每十年一次的人口普查。取1790、1850、和1910的数据为点，算出有关常数，他们得

$$N=\frac{197\ 273\ 000}{1+e^{-0.0313395t}} \tag{6}$$

然后算出这期间每十年的预测数 $N(t)$，与人口普查数据进行比较。结果由下表给出，Dartmouth 学院的写作组于1967年加进了四个十年的数据。

年	根据每十年一次的人口普查的人数	根据公式(6)的人数	误差	%误差
1790	3 929 000	3 929 000	0	0.0
1800	5 308 000	5 336 000	28 000	0.5
1810	7 240 000	7 228 000	−12 000	−0.2
1820	9 638 000	9 757 000	119 000	1.2
1830	12 866 000	13 109 000	243 000	1.9
1840	17 069 000	17 506 000	437 000	2.6
1850	23 192 000	23 192 000	0	0.0
1860	31 443 000	30 412 000	−1 031 000	−3.3
1870	38 558 000	39 372 000	814 000	2.1
1880	50 156 000	50 177 000	21 000	0.0
1890	62 948 000	62 769 000	−179 000	−0.3
1900	75 995 000	76 870 000	875 000	1.2
1910	91 972 000	91 972 000	0	0.0
1920	105 711 000	107 559 000	1 848 000	1.7
1930	122 775 000	123 124 000	349 000	0.2
1940	131 669 000	136 653 000	4 984 000	3.8
1950	150 697 000	149 053 000	−1 644 000	−1.1
1960	179 300 000*			
1970	204 000 000*			
1980	226 500 000*			

(*)十万以下四舍五入。

解　　答

1. $dy/dx=-y/x$.

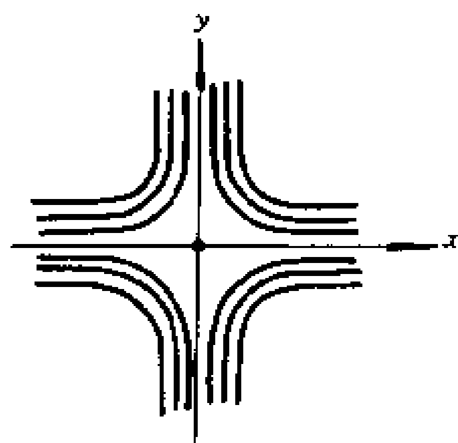


图 2.17

2. $dy/dx=y$.

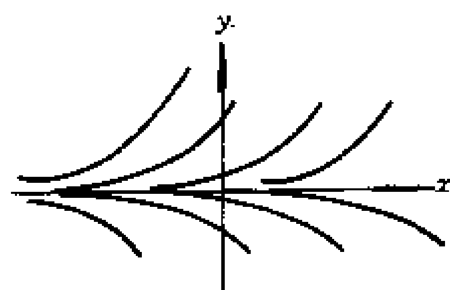


图 2.18

3. $\frac{dy}{dx}=\frac{-(x-1)}{y+1}=\frac{1-x}{1+y}$

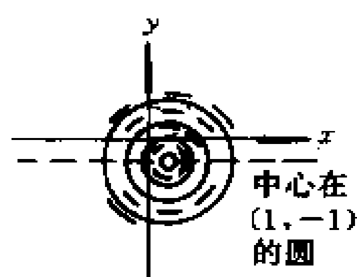


图 2.19

4. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x}$

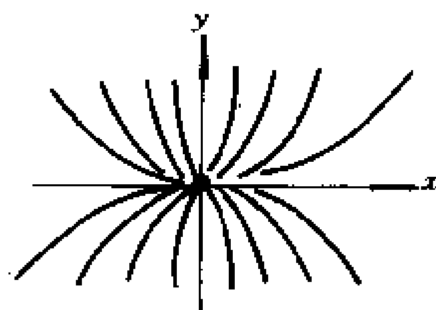


图 2.20

注：1. 和4. 的解在原点处出现了"洞"，在这里不存在唯一的解；3. 的解在(1，−1)处有这样的洞。在这些情况中，在指出的这些点处，$g(x,y)$和 $\partial g/\partial y$ 是"不好的"(g 未定义)。参见靠近本章开头接着唯一性定理之后的讨论。

5. $dN/dt=R-KN$.

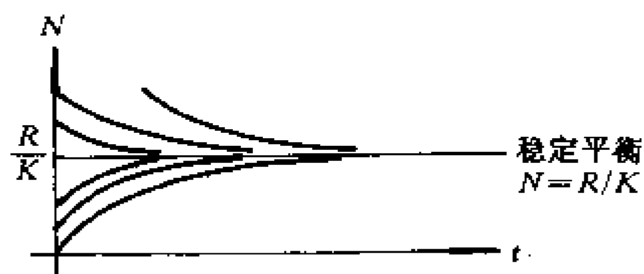


图 2.21

6. 70本书。

7. 当 $N=IS/(I+E)$时，$dN/dt=I(S-N)-EN=IS-N(I+E)$. 见图2.22.

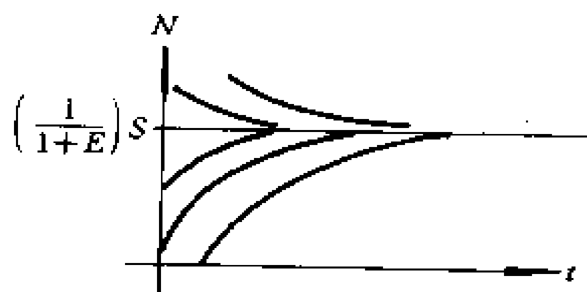


图 2.22

8. $dN/dt=kN(M-N)$，从图像上看在 $N=0$和 $N=M$ 处平衡。后者是稳定的平衡点。

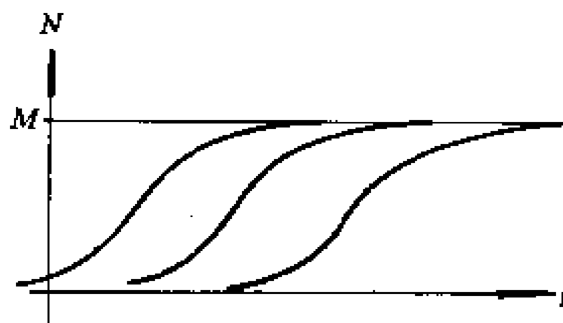


图 2.23

9. $y'=y^2-1=0$，，对于 $y=\pm 1$，

>0，对于$|y|>1$，

<0，对于$|y|<1$，

$y''=2yy'$

$=2y(y+1)(y-1)$

$=0$，对于 $y=0$，$y=\pm 1$，

>0，对于 $y>0$和$-1<y<0$，

<0，对于 $y<-1$和$0<y<1$.

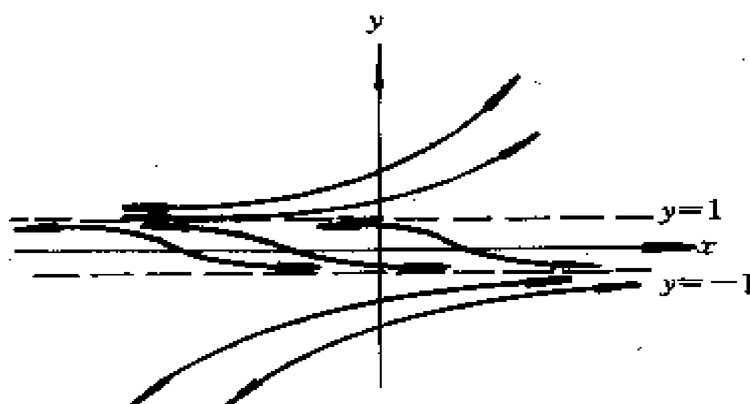


图 2.24

10. $y=y(y-2)(y-4)$,

$y'=0$,对于 $y=0,2,4$

>0,对于 $y>4$和$0<y<2$,

<0,对于$2<y<4$和 $y<0$.

$y''=(3y^2-12y+8)y'=0$,对于 $y'=0$或 $y=2\pm(2\sqrt{3}/3)$.

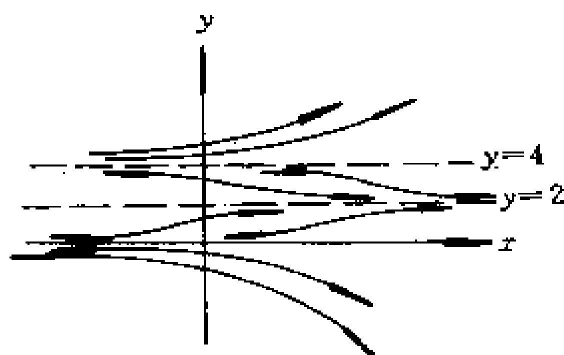


图 2.25

11. 当 $y=0$或 $x=0$时($y=0$是一个解)时,

$$y'=(e^{-x}-1)\begin{cases}>0,对第2和第4象限;\\<0,对第1和第3象限。\end{cases}$$

当 $y=0$或 $e^{-2x}-3e^{-x}+1=0$时,

$$y''=(e^{-2x}-3e^{-x}+1)y=0.$$

后一个方程有两个关于 x 的解,一个正,一个负:

$$3e^{-x}=e^{-2x}+1,$$

乘上 e^x

$$3=e^x+e^{-x}.$$

e^x 与 e^{-x} 的和的图形两次通过 $y=3$ 并且关于 y 轴对称。

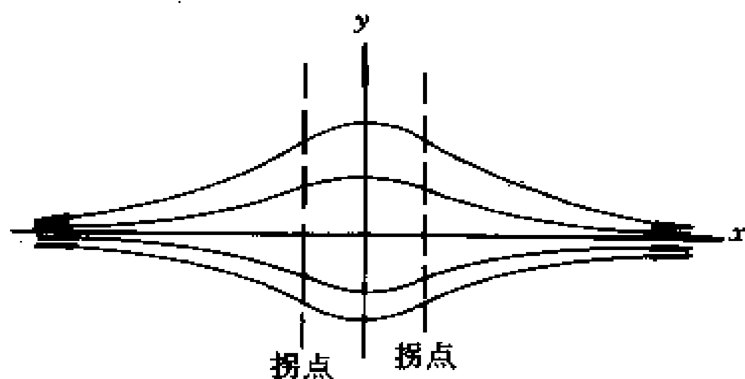


图 2.26

12. 当 $y=1$ 或 -3 时，$y'=(y-1)(3+y)=0$；

当 $y=-1$ 时，$y''=[(3+y)+(y-1)]y'=(2y-2)y'=0$.

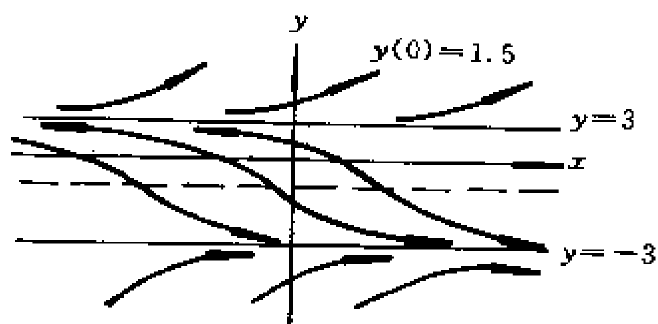


图 2.27

13. $y'=x(2-y)/(x+1), x>0$. 在 $x=0$或 $y=2$处，$y'=0$.

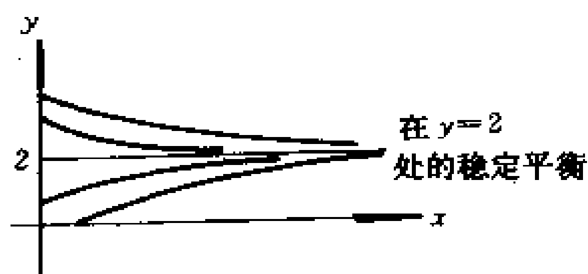


图 2.28

14. $y'+y^4=16$

	y'	y''
$y>2$	$-$	$+$
$0<y<2$	$+$	$-$
$-2<y<0$	$+$	$+$
$y<-2$	$-$	$-$

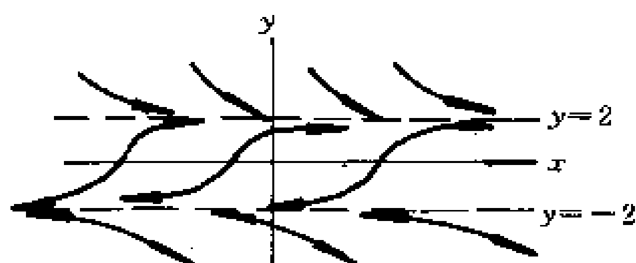


图 2.29

在 $y=2, y=-2$处，$y'=16-y^4=(2+y)(2-y)\underbrace{(4+y^2)}_{\text{总是正的}}$;

在 $y=0, 2, -2$处，$y''=-4y^3y'=0$.

15. 当 $y=2$时，$y'=8-y^3=(2-y)\underbrace{(4+2y+y^2)}_{\text{总是正的}}$, $y''=-3y^2y'$.

	y'	y''
$y>2$	$-$	$+$
$y<2$	$+$	$-$

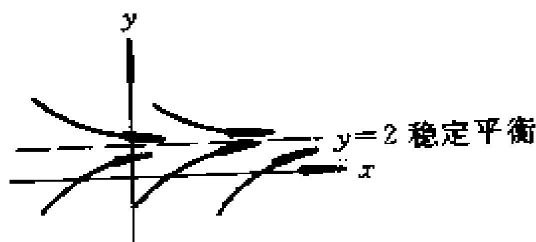


图 2.30

16. $y'=x+y$,

$y''=1+y'=x+y$,

$y(0)=0$.

故 $y'(0)=0$（水平的）及 $y''(0)=1$（向上凹的）。

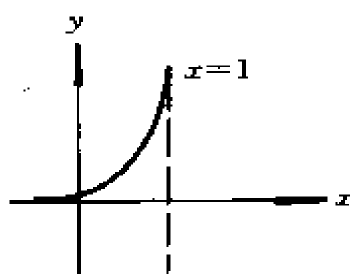


图 2.31

17. $dV/dt=k_1-k_2V^{2/3}$.

$V''=-K_2(2/3)\frac{V'}{V^{1/3}}$（故由 V' 知有正号），

在 $V^{2/3}=K_1/K_2$ 或 $V=(K_1/K_2)^{3/2}$ 处，$V'=0$.

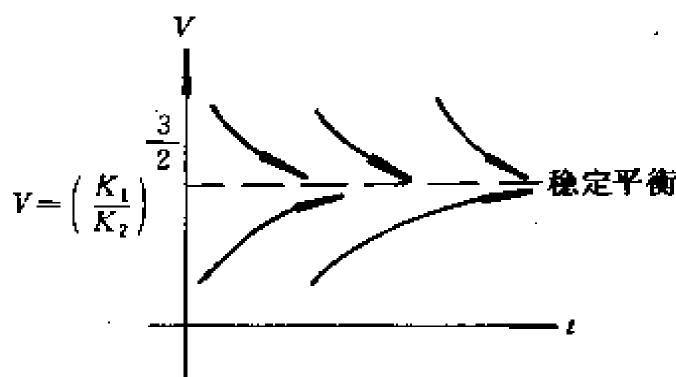


图 2.32

18. 在 $N=0$，$N=(r_2/r_1)^2$ 处，

$dN/dt=r_1N-r_2N^{1/2}=N^{1/2}(r_1N^{1/2}-r_2)=0$；

在 $N'=0$，$N=(r_2/(2r_1))^2$ 处，

$N''=r_1N'-\frac{r_2}{2N^{1/2}}N'=N'\left(r_1-\frac{r_2}{2N^{1/2}}\right)=0.$



图 2.33

19. $y'=y(1/x)$，$x\geqslant1$；水平斜率在 $x=1$ 处，拐点在 $x=2$ 处（当 $x\to\infty$，$y(x)\to0$）.

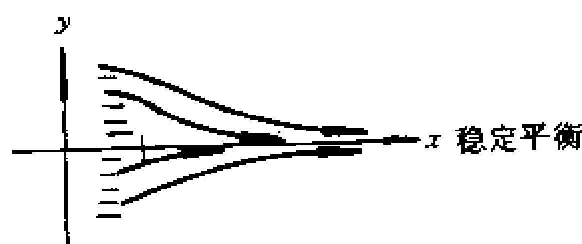


图 2.34

20. $y'=e^x-y$，

$y'=e^x-y=0$，当 $y=e^x$ 时，

>0，对于 $y<e^x$，

<0，对于 $y>e^x$；

$y''=e^x-y'$

$=e^x-(e^x-y)$

$=y=0$，在 $y=0$ 处

>0，对于 $y>0$，

<0，对于 $y<0$.

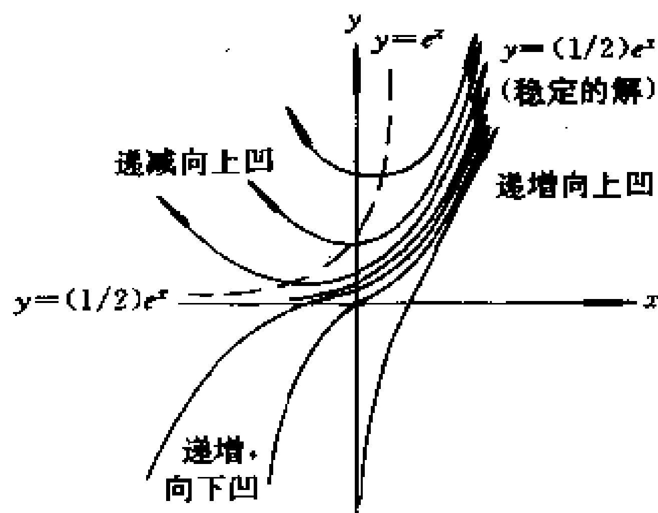


图 2.35

21. $y(x)=\int_0^x e^{-t^2}dt$; $y'=e^{-x^2}$; $y(0)=0$.

$y'=e^{-x^2}\neq 0$,对所有 x.

$\to 0$,当 $x\to\pm\infty$时(故具有水平渐近线),

$y''=e^{-x^2}(-2x)=0$,对于 $x=0$,

>0,对于 $x<0$,

<0,对于 $x>0$;

$y'(0)=1$; $y''(0)=0$.

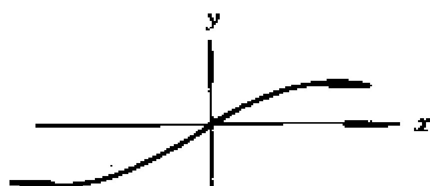


图 2.36

22. $$\int\left(\frac{1}{N-N^2/k}\right)dN=\int r\,dt$$

$$=\int\left(\frac{1/k}{1-(N/k)}+\frac{1}{N}\right)dN$$

$$=rt+a$$

$$=-\ln\left|1-\frac{N}{k}\right|+\ln N$$

$$=rt+a,$$

$$\frac{N}{1-\frac{N}{k}}=(\text{常数})e^{rt}\text{或}\frac{N}{K-N}=Ce^{rt}$$

$$\Rightarrow N=\frac{kCe^{rt}}{1+Ce^{rt}}=\frac{K}{1+\frac{e^{-rt}}{c}},$$

（或 $M=\frac{1}{N}$；$\frac{dM}{dt}=-\frac{1}{N^2}\frac{dN}{dt}\Rightarrow\frac{dM}{dt}+rM=\frac{r}{k}$

$\Rightarrow M=\frac{1}{k}+Ce^{-rt}$，等）。

教　师　参　考

目的　解的定性图示主要用于描写生物或社会科学领域中的数学模型。本章详述了在不给出解的明确表达式的情况下图示的技术，以及考察解在 $x\to\infty$ 时的远期性质。在许多情况下，它展示了人们所要知道的全部内容。远期的平衡和稳定性也有所讨论。

预备知识　初等微积分——特别是解的图示（斜率和凹性），识别一阶常微分方程的通解，可分离方程的简单积分法。

时间　可以用不到一堂课的时间向学生介绍有关内容；对比较困难的问题可放到下次课上讨论。

注　我们给出了所有练习的解，不过下面的注释或许是有用的。练习1～19都不困难——它们直接选自课外练习和考试题。练习1～4都有使唯一性定理不成立的点。有一半应用题要求列出微分方程，而另一半则明确地给出了方程式。练习20和21有一点技巧性。练习22是对例3的补充说明：如果学生们曾学过这类题目，他们就可以解这个微分方程（用分离变量或用变量代换导出一个线性微分方程）；如果没有，明确的答案已经给出，并且要求他确信所给的解满足微分方程。附加的表格表示出与模型吻合的理想数据。

第 3 章

差分与微分方程群体增长模型

James C. Frauenthal *

1. 引　　言

通常，导数定义为下述极限

$$\frac{dy}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \tag{1a}$$

类似地，当用计算机从数值上求解微分方程时，我们常用下面的有限差分近似地代替导数

$$\frac{dy}{dt} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}. \tag{1b}$$

这两个运算实际上恰好是互逆的。有时，由于可以使用微积分，因而自变量的有限区间趋于零，这时，差分方程转化为类似的微分方程很方便。但在另一些场合，这个极限过程"不能进行"，因而，可以把一个数值方法用于一个与微分方程类似的差分方程。不幸的是，这些相反的运算深深地影响着所求出的解的性质。这一章的主题正是这个常被人们忽视的问题。

* Department of Applied Mathematics and Statistics, State University of New York, Stony Brook, NY 11794.

我们将通过研究一个众所周知的方程来说明，对一个问题用差分方程处理与用类似的微分方程处理可能会得出截然相反的结论。我们所研究的方程可解释为对一个有限环境内某单一物种增长的描述。用差分方程表示就是

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=r_0\left[1-\frac{N(t)}{K}\right]N(t),$$

$$\begin{cases} t \geqslant 0, \\ N(0)=N_0. \end{cases} \tag{2}$$

其中 $N(t)$ 为 t 时刻的群体规模，r_0 和 K 是正的常数，它们是群体增长参数，而 N_0 为一正的常数，它给出了初始的群体规模。(为了完整起见，我们把导出(2)的一些假设列了出来，而这个方程的很多详细推导则放在附录中。)如果考虑(2)中的 $\Delta t \to 0$，得到的微分方程类似于(2)的结果

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=r_0\left[1-\frac{N(t)}{K}\right]N(t),$$

$$\begin{cases} t \geqslant 0, \\ N(0)=N_0. \end{cases} \tag{3}$$

这是一个非线性微分方程，通常称为逻辑方程。

注意，虽然我们是用特殊的一对方程来说明问题，但本章中详述的论点都很有一般性，并且对所有差分和微分方程都可不同程度地继续深入下去。

2. 差分方程的解

首先，考虑怎样才能解差分方程(2)。因这个方程是非线性的，所以不能直接求解。不过，借助于一个袖珍计算器，或更好一点，用一台计算机，在给定了 r_0、K、和 N_0的情况下，对任意选取的正的 Δt，我们可确定出数列 $N(n\Delta t)$，$n=0,1,2,\cdots$. 我们将按下面的方

法进行求解。先在(2)中设 $t=0$，求得

$$N(\Delta t)=N_0+\left\{r_0\left[1-\frac{N_0}{K}\right]N_0\right\}\Delta t, \tag{4a}$$

然后，在(2)中设 $t=\Delta t$，求出

$$N(2\Delta t)=N(\Delta t)+\left\{r_0\left[1-\frac{N(\Delta t)}{K}\right]N(\Delta t)\right\}\Delta t, \tag{4b}$$

通过依次假设 $t=n\Delta t, n=0,1,2,\cdots$，我们就可"逐步向前"——依据早先的值求出 $N(n\Delta t)$ 的每一个新值。

注意，这并不是通常意义下的解，但在相继的时刻瞬间，它们却非常正确地反映了动物群体的规模。虽然 r_0、K 以及 N_0 可能是给定的，但 Δt 的选择却是任意的，而且不存在选取 Δt 的方法。Δt 取得很小，我们就能获得更多的细节——不过计算器或计算机的使用费用就要高了。同样，这个方法的一个严重不足，就是如果我们希望得出 r_0、K 以及 N_0 取不同值时的答案，那么，对每一组这样的取值，整个解都必须重新计算。因此，我们希望寻找一种方法，它能够提供一种"形式紧凑"的解。因为，对非线性差分方程，没有已知的求紧凑解的通用的解析技术，于是，我们决定考察类似的微分方程(3)。

3. 微分方程的解

虽然逻辑方程(3)也是非线性的，但对于它的某种特殊形式，我们可以找到一个解析解。所用方法的前提是因变量(N)和自变量(t)可用代数方法移至方程的两边。能够用这种方法分离的方程，可直接用从初始状态到任意时刻的积分解出。于是

$$\int_{N_0}^{N(t)}\frac{\mathrm{d}N}{N\left(1-\dfrac{N}{K}\right)}=r_0\int_0^t \mathrm{d}t. \tag{5}$$

左边积分容易计算，即用部分分式将被积函数展开(参见练习1)。

用一点代数方法，可得

$$\frac{N(t)}{K}=\frac{e^{r_0 t}}{\frac{K}{N_0}+e^{r_0 t}-1},\ t\geqslant 0. \tag{6}$$

从解的这一形式可以很明显地看出，实际出现的变量是

$N(t)/K$ 和 $r_0 t$.

这就是说，我们的解只须对不同的 N_0 取值进行计算。这从图3.1中的解曲线可清楚地看出，这个图给出了 N_0 的三种可能的选取。(注意 r_0 和 K 在实际背景下总是正的——如果不明确请看附录。)

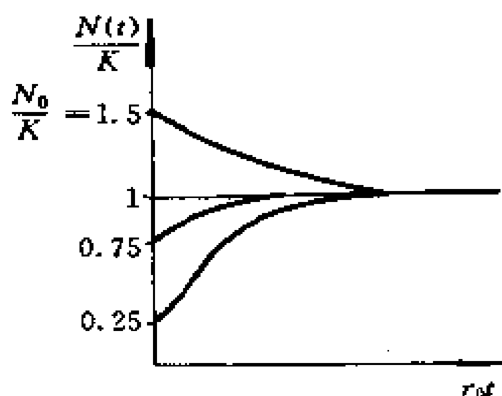


图3.1　对于初始群体规模的三个值，逻辑微分方程的解

要注意的最重要的事情是，不论初始的群体规模 N_0 怎样，当 $r_0 t\to\infty$ 时，$N(t)/K\to 1$. 当然，这等价于 $t\to\infty$ 时，$N(t)\to K$，因为 $r_0>0$. 通过直接检验解不难证实这一点。进一步请注意(参见练习2)，解绝不会穿过直线 $N/K=1$；若 $N_0/K>1$，解由上方趋近 $N/K=1$，若 $N_0/K<1$，解由下方趋近 $N/K=1$.(生物学家称 K 为环境的“承载能力”。)

显然，我们找到了一种寻找解析解的方法，就是把差分方程转化为微分方程。当 r_0、K 或 N_0 改变时，使用这种方法是很容易的。事实上，这也说明了为什么微积分如此重要。然而，令 $\Delta t\to\infty$ 的过程已经对解的性质有了极其重要的影响。其真实性将通过比较差分方程(4)的各种数值解的结果与微分方程(6)的解来说明。不过，有一种有效的方法，它能提供更多的信息。

4. 线性稳定性分析

我们把所用的方法叫作线性稳定性分析。这是寻找非线性差分方程和非线性微分方程解的性质的一种非常通用的方法。为了理解这个方法，首先有必要明白平衡这个词的意义。

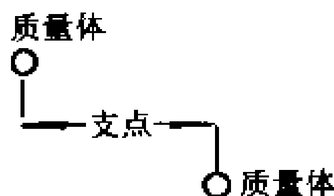
简单地讲，一个系统若处于一种平衡状态，就说它是平衡的。比较实用的是平衡的函数式定义，对微分方程(3)来说，定义式是 $dN/dt=0$. 对差分方程(2)，类似的定义是 $N(t+\Delta t)=N(t)$. 注意到，对这两个具体方程来说，平衡就意味着

$$r_0\left(1-\frac{N}{K}\right)N=0. \tag{7}$$

这个代数方程的解是 $N=0$ 和 $N=K$，我们称它们为平衡点。

线性稳定性分析为我们提供了一种确定方程的平衡点在作小量扰动后是否稳定的数学方法。弄清这一点是很重要的，因为实际上，人们发现系统是处在稳定平衡点(或其附近)，而不是处在不稳定平衡点(或其附近)。借助于一个简单的物理例子就可以明白这一点。

考虑一个由一根长而直的刚性棒做成的摆，其一端安上铰链，另一端有一质量。这个系统有两个平衡点，一个是质量在支点的正上方时的位置，另一个是质量在支点的正下方时的位置。前者的结构称为不稳定的。因为使质量离开平衡位置的最微小的干扰都会产生一种力，它驱使系统由平衡位置向更远的位置移动。注意，通常人们并不希望得到处于这种状态的系统。虽然后者结构的稳定性决定于支点摩擦力的大小，但它是稳定的。如果没有摩擦力并给质量一点点干扰，它将经过平衡点来回摆动，每次都回



到最大位移点。称这种情况为振荡式随遇稳定。如果稍微有点摩擦，并给质量一点干扰，它将来回摆动，但每次摆动的幅度都比前一次小些，直到最后在平衡点处停止。这种情况称为振荡式（渐近地）稳定。最后，如果出现很大的摩擦，给质量一点点干扰，它将慢慢地回到平衡点，并停留在那里不再越过平衡点。这种情况称为非振荡式（渐近地）稳定。注意，通常我们希望遇到的是摆的稳定位置。

接下来，我们考察数学模型中微分方程和差分方程在 $N=K$ 处的平衡性质。因为，我们的模型只对相当大的群体才有效（在附录中对这一点进行了讨论），所以，毋须去考察 $N=0$ 处的平衡点。注意，由于我们已经知道微分方程的解析解(6)，这样，我们就可以预期问题的答案。一看解的曲线，就明白人口总数总是渐近地使得 $N/K=1$，且不通过平衡点。于是，我们希望 $N=K$ 是一个稳定的非振荡的平衡一点。

对平衡点进行线性稳定性的分析过程如下。首先，定义一个新的应变量，它的原点（零点）出现在 $N=K$ 处。例如，我们可设 $X(t)$ 为新的变量并定义 $N(t)=K+X(t)$. 尽管这种假设是完全可行的（参看练习6），但是，如果我们改用新的应变量 $x(t)=X(t)/K$，从而 $N(t)=K[1+x(t)]$，那么，我们即将要进行的讨论就会稍微简洁些。把这个表达式代入到微分方程(3)中，得

$$\frac{dx}{dt}=-r_0x-r_0x^2,\begin{cases}t\geqslant 0\\ x_0\text{ 给定}\end{cases}\tag{8}$$

其中，Kx_0是离开平衡态的初始扰动幅度。注意，(8)与(3)实际上是一致的，只不过它是用新变量 $x(t)$ 写成的。下面进行线性化。为此我们要求 $|x|$ 非常小，即 $|x|\ll 1$，而如果是这样的话，$|x^2|\ll|x|$. 与(8)式右边 x 的线性项相比，忽略掉 x^2 项（以及所有可能存在的更高阶的项）。于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \approx -r_0 x, \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x_0 \text{ 给定} \\ |x| \ll 1 \end{cases} \tag{9}$$

为了相容起见，我们还必须要求$|x_0| \ll 1$. 这是一个线性微分方程，通过分离变量和积分很容易将其解出：

$$\int_{x_0}^{x(t)} \frac{\mathrm{d}x}{x} \approx -r_0 \int_0^t \mathrm{d}t. \tag{10}$$

容易看出，解是

$$x(t) \approx x_0 e^{-r_0 t}. \tag{11}$$

注意，不论x_0的符号如何，因$r_0>0$，故$t\to\infty$时，$x(t)\to 0$. 另外，对$t\geqslant 0$，$x(t)$的符号不变。这样我们就可以下结论，微分方程(3)在$N=K$处的平衡是稳定且非振荡的。这是我们起初所预期的。

下面，我们要重复上面的线性稳定性分析，这次是对差分方程(2)在$N=K$处的平衡态进行的。整个方法与微分方程所用的方法完全类似。于是，在(2)中设$N(t)=K[1+x(t)]$，从而导出

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = -r_0 x(t) - r_0 x^2(t), \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x_0 \text{ 给定} \end{cases} \tag{12}$$

且同样要求$|x| \ll 1$. 然后，我们可进行线性化，得

$$x(t+\Delta t) \approx (1-r_0\Delta t)x(t), \begin{cases} t \geqslant 0 \\ x_0 \text{ 给定} \\ |x| \ll 1 \end{cases} \tag{13}$$

因为这是一个线性差分方程，故解起来很简单。我们喜欢线性稳定性分析的原因也就在于此。对这个解展开讨论，最容易的方法可能就是归纳法。首先，在(13)中取$t=0$，得

$$x(\Delta t) \approx (1-r_0\Delta t)x_0, \tag{14a}$$

然后在(13)中取$t=\Delta t$，得

$$x(2\Delta t) \approx (1-r_0\Delta t)x(\Delta t), \tag{14b}$$

利用(14a)从(14b)中消去$x(\Delta t)$，

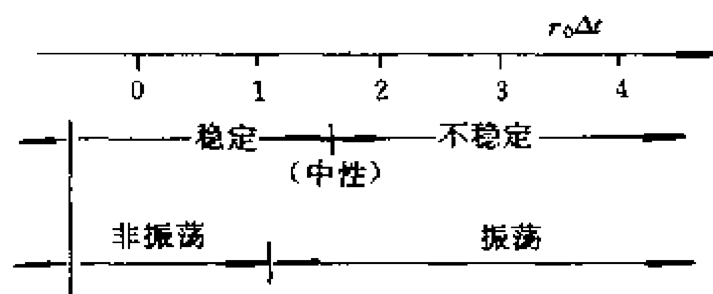
$$x(2\Delta t) \approx (1 - r_0\Delta t)^2 x_0.$$

归纳地重复这一过程，得通解

$$x(n\Delta t) \approx (1 - r_0\Delta t)^n x_0, n = 0,1,2,\cdots. \tag{15}$$

解释这个结果时要注意某些事情。因为 x_0仅仅是一个很小的常数，所以，解的特性是由与 x_0相乘的那一项在 n 取相继正整数时表现出的。显然，如果$|1-r_0\Delta t|<1$，则当 $n\to\infty$时，$x(n\Delta t)\to 0$. 这就是说，如果$0<r_0\Delta t<2$，平衡是稳定的。类似地，如果 $r_0\Delta t=2$，则平衡是随遇稳定的；如果 $r_0\Delta t>2$，则平衡是不稳定的。（注意，我们不允许 $r_0\Delta t\leqslant 0$，因为 r_0和 Δt 都必须是正的。）还要注意，如果量$(1-r_0\Delta t)<0$，那么，$x(n\Delta t)$的相继值具有相反的符号。这就是说，如果 $r_0\Delta t>1$，那么，解是振荡的，否则是非振荡的。

现在，我们用一根数轴把上述结果表示出来。



从这个表示中我们得出下面的结果。如果$0<r_0\Delta t<1$，平衡是稳定且非振荡的；如果$1<r_0t<2$，平衡是稳定且振荡的；如果 $r_0t>2$，平衡是不稳定且振荡的。还要注意，如果 $r_0\Delta t=2$，平衡是随遇稳定且振荡的。（如果 $r_0\Delta t=1$，就会出现一个病态解，观察线性化的差分方程(13)可以看到这种情况，这时需要采取变通的方法。）

图3.2概括了稳定性分析的各种结论。所有的说明都是对平衡态 $N=K$ 处的一个很小的负的初始扰动 x 进行描绘的。注意，全部结论都标绘在$(N/K, r_0t)$坐标系中，这是直接利用定义 $N(t)=K[1+x(t)]$通过解(11)和(15)转换而来的。所讨论的微分方程有一个稳定的非振荡平衡，而差分方程从顶端到末端分别有一个稳

定的非振荡平衡，一个稳定的振荡平衡，以及一个不稳定的振荡平衡。回过头来看，我们之所以能够把这个差分(或微分)方程线性化，是基于$|x|\ll 1$. 当线性化的解离开平衡点时，$|x|$就不再是很小的了。这样我们的解就不准确了。换句话说，当一个线性化的解是发散的时候，它只是告诉我们不稳定性是怎样开始出现的。它并不能帮助我们预测不稳定性如何发展或系统向何处变化。

在估计图3.2中的解时，应当明白的最重要的事情就是所有结果都对应于模型控制参数N_0、r_0以及K的同一选择。唯一的区别就在于我们处理时间的方式。

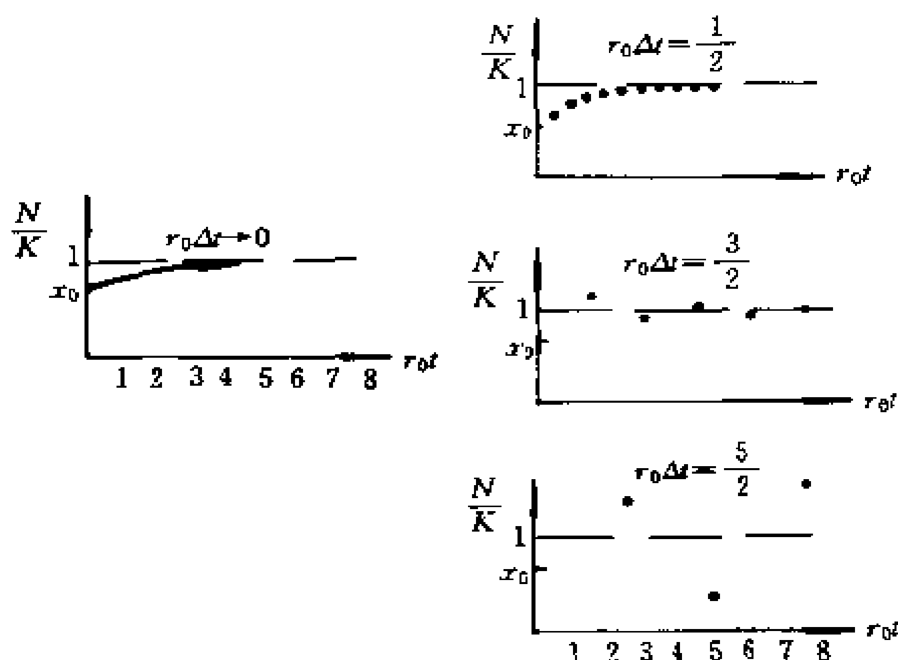


图3.2 在$N=K$附近，微分方程和差分方程的线性化形式的精选解

5. 结果说明

从另一方面对非线性差分方程(2)的精确解进行观察，将有助于阐明当Δt太大时，出现不稳定行为的原因。用算法

$$N_{新} = N_{旧} + \left\{r_0\left[1 - \frac{N_{旧}}{K}\right]N_{旧}\right\}\Delta t, \qquad (16)$$

替代(2)，并把这解释为$(N,\Delta t)$坐标系中的一条直线，这样就很容易看出问题。这个算法告诉我们，$N_{新}$ 的值是从 $N_{旧}$ 的值出发并沿一直线投影一个距离 Δt 而得到的，这条直线的斜率由括号{ }内的量给出。要注意的关键是直线的斜率完全由 $N_{旧}$(以及常数 r_0和 K)决定，与 Δt 无关。因此，在达到 $N_{新}$ 之前，Δt 的值越大，我们作的投影就越远。然后，只要将 $N_{新}$ 重新命名为 $N_{旧}$，再计算斜率，重复这个过程。

图3.3说明了这个过程，在那里 Δt 的选取是很大的，从而导致了不稳定性。注意，附加的曲线在 N 的任意值处的斜率就是(16)中大括号里的量。这样，由 N 的某个已知值开始，沿着 N 处曲线的切线方向伸展 $\Delta t=1$，就产生了我们的解。只有当要采用另一个 Δt 时我们才调整斜率到新的值。我们鼓励读者就较小的 Δt 值重复这个构造过程，以确信当 Δt 足够小时，就会出现稳定解。

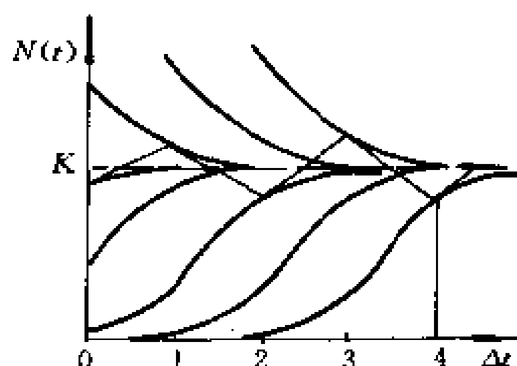


图3.3　对于导致不稳定性的 Δt 的值，非线性差分方程的精确图解

上述求解过程的一个物理模型，或许能帮助我们明白不稳定性的原因。设想你驾驶着一辆汽车，但被蒙住了眼睛。坐在你旁边的人在注视着道路并告诉你如何校正你的方向。你的速度就好比常数 r_0，使汽车保持在路上就类似于向平衡态 $N=K$ 逼近。如果你慢慢地行驶(小的 r_0)，而且你的助手能非常频繁地(小的 Δt)给你指示，你就能够保持在路上。但是，如果你的速度(r_0)或指示的时间间隔(Δt)变大，你就会越来越糟，最后驶出路的这边或那边。

6. 最后的注解

希望读者从这个练习中得到两点体会：第一，线性化稳定性分析技术对于预测非线性差分和微分方程的特性是非常有用的；第二，全面地考虑在数学模型中处理时间（自变量）的方式。

为了帮助你领会这一章的研究结果，有必要给出最后这个注解。要想确定当自变量的增量取得太大时是否会出现振荡，只要检验一下数值即可。做法很简单，用一个较小的步长重新计算一下，并比较它们的结果。如果比较的结果是一致的，那么，数值方法差不多不会出错。

研究某些真正以离散时间生存的昆虫类和鱼类的群体动力学是一项诱人的课题。在数学中与在自然界中一样，可以发现极其复杂和不寻常的结果。有兴趣的读者可查阅 May 的论文[3]或 Frauenthal 的著作[1]。

7. 附录：基本模型

让我们来考虑一种动物群体。我们的目标是构造一个简单的数学模型以便确定将来的群体规模。为此我们须作如下假设：

i) 群体对迁入和迁出是封闭的，而且群体的初始规模是已知的；

ii) 群体中的每一个动物与其它任何动物具有相同的死亡或繁殖机会；

第一个假设等于说离开群体的唯一途径就是死亡，而进入群体的途径或是出生或在建模的开始就存在。注意，尽管第一个假设从数学上讲是简单的，但在实际中可能是很难满足的。下面的叙述可以使第二个假设看上去更合理些。我们把每一个动物的平均繁殖和

存活特征看作是群体中所有动物共有的。当然，这种假设排除了所有个体的差异。第二个假设隐含了某种更深刻的结论：模型不考虑年龄和性别。

下面我们要定义变量。显然，自变量应为时间 t. 取时刻 t 时群体中动物的数目 $N(t)$ 为应变量。最后，设 b 和 d 分别表示单位时间群体中动物的出生数和死亡数。这样，由于 t 时刻的总数为 $N(t)$，所以在下一个小时间单元 Δt 内，将有 $bN(t)\Delta t$ 个动物出生。

为了将模型公式化，假设我们知道 t 时刻的群体规模 $N(t)$，于是我们要问，我们的假设对 Δt 时间后的 $N(t+\Delta t)$（Δt 很小）有什么要求。显然，由假设(i)知，$t+\Delta t$ 时刻的总数应等于时刻 t 的总数加上 Δt 期间内动物的出生数再减去它们的死亡数。利用假设(ii)来描述出生和死亡，可导出模型的符号形式：

$$N(t+\Delta t)=N(t)+bN(t)\Delta t-dN(t)\Delta t. \tag{A1}$$

这里出现了一个矛盾。动物是以整数单位出现的。然而，即使 $N(t)$ 是一个整数，在一般情况下我们也没理由期望 $N(t+\Delta t)$ 是一个整数。我们不必对这个问题感到惊恐。请注意，群体规模越大，相继的整数间的百分比差就越小。这样，如果总数很大，我们可将答案四舍五入到最近的整数，而不会使结果有严重的改变。这种无妨大局的做法，为我们提供了一种在 N 为任意正实值时预测群体规模的方法。因为负的动物数量毫无意义，所以，$N\leqslant 0$ 就意味着这种群体的绝种。

将(A1)改写成

$$\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t}=rN(t). \tag{A2}$$

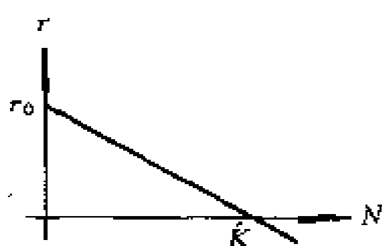
其中 $r=b-d$ 称为群体净增长率。注意，假设(ii)的一个间接结果就是方程中只计入了出生率与死亡率的差。

作为假设(i)的一个结果，我们假定在 $t=0$ 时群体的规模已知为 $N(0)=N_0$，我们的目标是求出(A2)在 $t\geqslant 0$ 时的解，N_0 是已知

的。注意，因为我们的公式与我们关于实际情况的假设是一致的，我们可以认为这个公式是“准确的”。就这一点而言，没有引进数学的近似。到目前为止，我们对净增长率 r 几乎未作说明。推测起来，r 将随时间或群体规模改变，或随两者同时而变。我们的下一项工作就是对这种变化作解析描述。凭直觉，我们作出如下假设。

iii) 个体的出生率 b 和死亡率 d 并不明确地依赖于时间；

iv) 当群体规模增长时，b 趋于减小而 d 趋于增大。



假设 iii)实际上就是说：既然我们不知道更好的结果，就只能忽略 b 和 d 对时间的变化。由于在有限的环境内会出现营养不良和拥挤，这就导致了后一个假设。

假设 iii)暗示了 $r=r(N)$，而 iv)提示我们 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}N<0$，不过这些假设还不足以定义 $r(N)$ 的函数形式。当对 $r(N)$ 的准确形式作近似时，我们选择与这些假设一致的最简单的(即线性的)表示式。

$$r = r_0 + r_1 N = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right). \tag{A3}$$

为了便于进一步的表述，我们引出了这个表示式的第二种形式，它是用 r_0 和 K 表达的。注意，我们要求 r_0 和 K 是正的常数，因此(A3)就像这里图示的那样。

注意，当总数小于 K 时，r 是正的；而当它大于 K 时，r 是负的。另外，递减表现为线性的。用(A3)中的近似表示式(写成 r_0 和 K 的形式)代换(A2)中的 r，我们得到方程

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r_0\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right]N(t),\ \begin{cases} t \geqslant 0 \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{A4}$$

如果 Δt 是有限的，这就是一个非线性差分方程，并且当 $\Delta t \to 0$ 时，它就成为一个非线性微分方程，即众所周知的所谓逻辑方程

$$\frac{dN}{dt} = r_0\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right]N(t), \begin{cases} t \geqslant 0 \\ N(0) = N_0. \end{cases} \tag{A5}$$

注意,(A4)和(A5)就是本章主题部分方程(2)和(3)的再现。

练　习

1. 解逻辑微分方程:

$$\frac{dN}{dt} = r_0\left(1 - \frac{N}{K}\right)N, \begin{cases} t \geqslant 0 \\ N(0) = N_0. \end{cases}$$

利用分离变量法和部分分式积分法得出结果

$$\frac{N(t)}{K} = \frac{\exp[r_0 t]}{\frac{K}{N_0} + \exp[r_0 t] - 1}.$$

2. 证明上述逻辑微分方程的解与直线 $N/K=1$ 永不相交。提示:直接考察微分方程。

3. 由图1可看出,仅对于 N_0/K 的较小值解才出现拐点。求拐点处的群体规模。

4. 对差分方程

$$\frac{N(t+\Delta t) - N(t)}{\Delta t} = r_0\left[1 - \frac{N(t)}{K}\right]N(t)$$

在 $N=0$ 处的平衡点进行分类。

注意,规定的初始干扰实际上很有意义。

5. 对逻辑微分方程

$$\frac{dN}{dt} = r_0\left[1 - \frac{N}{K}\right]N$$

重复练习4的讨论。

6. 对逻辑微分方程使用新的自变量 $X(t)=N(t)-K$,在 $N=K$ 处,重复进行线性稳定性分析。

7. 考虑微分方程

$$\frac{1}{K}\cdot\frac{dN}{dt} = 1 - \exp[-r_0(1-N/K))], \begin{cases} t \geqslant 0, \\ r_0, K > 0. \end{cases}$$

a) 求平衡点。

b) 确定平衡点处的稳定性性质。(注:为了线性化,必须利用 Taylor 级数展开式。)

解 答

1. $\frac{dN}{dt}=r_0\left(1-\frac{N}{K}\right)N,\begin{cases}t\geqslant 0,\\ N(0)=N_0\end{cases}\Rightarrow\int_{N_0}^{N(t)}\frac{dN}{N(1-(N/K))}=r_0\int_0^t dt=r_0t.$

部分分式：

$$\frac{1}{N(1-(N/K))}=\frac{A}{N}+\frac{B}{1-(N/K)}=\frac{A-AN/K+BN}{N(1-(N/K))}$$

$$\Rightarrow A=1,B=A/K=1/K,$$

于是

$$r_0t=\int_{N_0}^{N(t)}\frac{dN}{N}+\int_{N_0}^{N(t)}\frac{d(N/K)}{1-(N/K)}$$

$$=\ln N\Big|_{N_0}^{N(t)}-\ln(1-(N/K))\Big|_{N_0}^{N(t)}$$

$$=\ln\frac{N(t)[1-(N_0/K)]}{N_0[1-(N(t)/K)]}$$

$$\Rightarrow\frac{N(t)[1-(N_0/K)]}{N_0[1-(N(t)/K)]}=\exp[r_0t],$$

$$N(t)\{[1-(N_0/K)]+(N_0/K)\exp[r_0t]\}=N_0\exp[r_0t]$$

$$\frac{N(t)}{K}=\frac{\exp[r_0t]}{(K/N_0)+\exp[r_0t]-1}.$$

2. $dN/dt=r_0(1-(N/K))N$，于是，在 $N=K$ 处，$dN/dt=0\Rightarrow N(t)$不会与 $N=K$ 相交。

3. $\frac{dN}{dt}=r_0\left(1-\frac{N}{K}\right)N=r_0N-r_0\frac{N^2}{K},$

$$\frac{d^2N}{dt^2}=r_0\left\{\frac{dN}{dt}-\frac{2N}{K}\cdot\frac{dN}{dt}\right\}=r_0\left\{1-\frac{2N}{K}\right\}\frac{dN}{dt}.$$

拐点在 $d^2N/dt^2=0$及 $dN/dt\neq 0$处出现$\Rightarrow 1-(2N/K)=0$. 于是 $N=K/2$或 $N/K=1/2$.

4. 稳定性分析：设 $N(t)=K(t)$

$$\Rightarrow K\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=r_0\left[1-\frac{Kx(t)}{K}\right]Kx(t),$$

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}=r_0x(t)-r_0x^2(t).$$

假定$|x|\ll 1\Rightarrow|x^2|\ll|x|$. 线性化，得

$$x(t+\Delta t)\approx(1+r_0\Delta t)x(t).$$

初始干扰：$x(0)=x_0>0$.

线性差分方程的解：

$$x(n\Delta t)=(1+r_0\Delta t)nx_0.$$

但是 $r_0\Delta t>0\Rightarrow 1+r_0\Delta t>1$. 所以平衡是不稳定且非振荡的。

5. 稳定性分析：设 $N(t)=Kx(t)$

$$\Rightarrow K\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_0\left(1-\frac{Kx}{K}\right)Kx,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=r_0x-r_0x^2.$$

假定 $|x|\ll 1\Rightarrow |x^2|\ll |x|$. 线性化，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\cong r_0x.$$

初始干扰：$x(0)=x_0>0$.

微分方程的解：

$$x(t)=x_0\exp[r_0t].$$

但是 $r_0>0$，所以平衡是不稳定且非振荡的。

6. 稳定性分析：设 $N(t)=K+X(t)$,

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}=-r_0X-r_0\frac{X^2}{K}.$$

假设 $|x|\ll K\Rightarrow |x^2/K|\ll |X|\ll K$. 线性化，得

$$\frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}\cong -r_0X.$$

初始干扰：$X(0)=X_0$.

线性微分方程的解：

$$X(t)=\lambda_0\exp[-r_0t].$$

因 $r_0>0$，当 $t\to\infty$ 时 $X(t)\to 0$，所以平衡是稳定且非振荡的。

7. $\frac{1}{K}\cdot\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=1-\exp[-r_0(1-(N/K))]$.

a) 平衡：$\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=0\Rightarrow 1-\exp[-r_0(1-(N/K))]=0\Rightarrow N=K$

b) 稳定性：设 $N(t)=K[1+x(t)]$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1-\exp[r_0x].$$

级数展开式：$\exp[r_0x]=1+r_0x+\frac{1}{2}r_0x^2+\cdots$，于是

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-r_0x-\frac{1}{2}r_0x^2-\cdots.$$

假定 $|x|\ll 1\Rightarrow |x^n|\ll |x|,n=2,3,\cdots$，线性化，得

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\approx -r_0x,\ x(0)=x_0.$$

解：

$$x(t)\approx x_0\exp[-r_0t].$$

因 $r_0>0$，$t\to 0$ 时 $x(t)\to 0$，所以平衡是稳定且非振荡的。

参 考 文 献

[1] J. C. Frauenthal, *Introduction to Population Modeling*. UMAP Monograph Series, Birkhauser－Boston, 1979, pp. 59－13.

[2] R. M. May. *Stability and Complexity in Model Ecosytems*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973, pp. 26－30.

[3] —, "Biological populations with nonoverlapping generations Stable points, stable cycles and chaos," *Science*, 186, 645－647, Nov. 15, 1974.

[4] J. Maynard Smith, *Mathematical ideas in Biology*. New York: Cambridge Univ. Press, 1971, pp. 20－25, 40－44.

[5] E. O. Wilson and W. H. Bossert, *A Primer of Population Biology*. Stamford, CT: Sinauer Associates, 1971, pp. 14－19, 102－111.

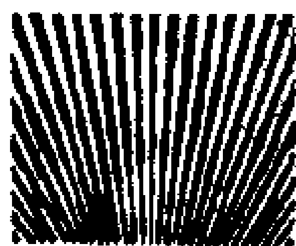
教 师 参 考

目的 研究取了极限 $\Delta t \to 0$ 以后，把差分方程转化为微分方程的数学结果。在这个转化过程中，对线性稳定性分析的方法展开了详细讨论。在微分方程、数值分析或数学群体生物学等课程的绪言中引用本章，同样令人满意。

预备知识 一年的微积分。略知道些群体生物学和牛顿力学知识，将有助于本章内容的学习，不过教师要作些补充。

时间 用一个课时完成本章的内容。学生预习一下本章更好。

第Ⅱ部分



生长和衰变模型：一阶微分方程

第 4 章

Van Meegeren 的艺术伪造品

Martin Braun *

第二次世界大战中，比利时解放后，德国战场安全部开始追捕纳粹同党。在一家公司的记录中（这家公司曾把大批艺术品出卖给德国），他们发现了一个银行家的名字，这个银行家在将17世纪荷兰著名画家 Jan Vermeer 的画《妓女》拍卖给 Goering 时做过中间人。这个银行家还承认他曾是德国三流画家 H. A. Van Meegeren 的代理人（1945年5月29日，Meegeren 因通敌罪被捕）。1945年7月12日，Meegeren 在监狱的单人牢房中说他从未将《妓女》卖给 Goering，这使世界感到震惊。更有甚者，他说这幅画以及非常著名和精美的《Emmaus 的信徒们》、还有其它四幅被认为是 Vermeer 的作品和两幅被认为是 de Hooghs（17世纪荷兰另一位画家）的作品都是他伪造的。许多人认为 Van Meegeren 是在说谎，他是为了逃脱通敌的罪责。为了证实他所说的，Van Meegeren 开始（在监狱中）伪造 Vermeer 的画《耶稣在学者们中间》，从而向持怀疑态度的人表明他实际上是一个多么好的 Vermeer 作品的伪造者。当他的工作几乎要完成时，他获悉他的通敌罪已被伪造罪所取代。于是，他拒绝完成他的画及使之老化，他希望调查人员不会发现使他的

* Department of Mathematics, Queens College, Flushing, NY 11367.

伪造品老化的秘密。为了解决这个问题，一个由著名化学家、物理学家和艺术史学家组成的国际调查小组受命调查此事。调查小组对油画作了 X 射线检查以确定是否有其它油画在它们下面。此外，他们分析了绘画所用的颜料（色彩材料），并检验某些年代迹象。

Van Meegeren 非常了解这些方法。为了避免被发现，他把不怎么值钱的旧油画敲毁来取得画布，并试图用 Vermeer 可能用过的颜料。Van Meegeren 还知道，旧的画是非常坚固的，不可能被溶解。所以，他在他的画中巧妙地混合了一种化学物品（苯酚甲醛），当把完成了的画放进烘箱中加热时，这种化学物品就变为坚硬的酚醛塑料。

不过，Van Meegeren 在伪造品的有些方面也考虑不周，专家小组发现了现代颜料钴蓝的痕迹。另外，他们还在有些画中发现了苯酚甲醛（这种化学物最初发现于19世纪末）。基于这些证据，Van Meegeren于1947年10月12日被判为有罪，并被判处一年监狱徒刑。在服刑期间，他心脏病发作，于1947年11月30日死亡。

尽管有专家小组收集到的证据，许多人还是不愿相信著名的《Emmaus 的信徒们》是 Van Meegeren 伪造的。他们的论点是基于这样的事实，其它已确认的伪造品和 Van Meegeren 快要完成的《耶稣在学者们中间》的质量都很差。他们说的确实有道理，精美的《Emmaus 的信徒们》的创作者是不会作出如此低劣的画的。而事实上，著名的艺术史学家 A. Bredius 也证明了《Emmaus 的信徒们》是真正的 Vermeer 的作品，并且该画已被 Rembradt 协会用170 000美元买下。调查小组对这些持怀疑态度者的回答是这样的，由于 Van Meegeren 对他在艺术界没有重要地位极其不满，他带着狂热的决心临摹了《Emmaus 的信徒们》，为的是要证明他实际上比三流画家强。作出这样一件杰作后，他的决心消失了。加之，当看到处置《Emmaus 的信徒们》是多么容易，他就对随后的伪造

品不太下功夫了。这样的解释并不能使怀疑者满意。他们要求有一个完全科学的、确定性的证明，证实《Emmaus 的信徒们》确实是一件伪造品。1967年卡内基-梅隆大学的科学家们作了这一证明，这里我们愿意描述一下他们的工作。

本世纪初，人们发现确定绘画或其它物质如岩石、化石的年代，关键在于放射性现象。物理学家 Rutherford 和他的同事们证明，某些“放射性”元素的原子是不稳定的，在一个给定的时期内，一定比例的原子会自动地衰变，形成新元素的原子。放射性是原子的一个特性，Rutherford 证明了，一种物质的放射性与现存的物质的原子数成正比。这样，如果 $N(t)$ 表示 t 时刻存在的原子数，则每单位时间衰变的原子数 dN/dt 与 N 成比例；即

$$dN/dt = -\lambda N. \tag{1}$$

正的常数 λ 叫作物质的衰变常数。自然，λ 越大，物质衰变得越快。对物质衰变速度的一种度量就是物质的半衰期，它定义为一定数量的放射性原子衰变到一半时所需要的时间。我们可根据 λ 来计算物质的半衰期。假设在 t_0 时刻，$N(t_0) = N_0$. 则初值问题

$$dN/dt = -\lambda N, N(t_0) = N_0$$

的解是

$$N(t) = N_0\exp[-\lambda\int_{t_0}^{t} dt]^* = N_0\exp[-\lambda(t-t_0)]$$

或 $N/N_0 = \exp[-\lambda(t-t_0)]$. 两边取对数，得

$$-\lambda(t-t_0) = \ln\frac{N}{N_0}. \tag{2}$$

如果 $N/N_0 = 1/2$，则 $-\lambda(t-t_0) = \ln(1/2)$，故

$$(t-t_0) = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{0.6931}{\lambda}. \tag{3}$$

---

* 原文误为 $\int_{t_0}^{t} ds$. —— 译注。

所以，一种物质的半衰期为ln2除以衰变常数λ. λ的量纲(为书写简便我们把它省略了)为时间的倒数。如果t用年度量，则λ有相应的量纲1/yr，如果t用分度量，则λ有相应的量纲1/min. 许多物质的半衰期都已被测定并有记录。例如，碳—14的半衰期为5 568年，铀—238的半衰期是45亿年。

"放射性断代"的基础如下。由(2)可解得

$$t - t_0 = (1/\lambda)\ln(N_0/N).$$

如果t_0为某种物质最初形成或制造出的时间，则该物质的年代就是$(1/\lambda)\ln(N/N_0)$. 在大多数情况下，衰变常数λ是已知或可算出的。此外，通常很容易算出N. 这样，如果知道N_0，我们就能确定该物质的年代，但这正是实际的困难所在，因为通常我们并不知道N_0，不过在某些情况下，我们可以间接地确定N_0，或确定N_0的某个适当的范围，Van Meegeren 的伪造品就属于这种情况。

我们从初等化学的下面这些众所周知的事实开始。地壳中的所有岩石几乎都含有少量的铀。岩石中的铀衰变成一种其它的元素，而这种元素又衰变成另一种元素，如此衰变下去，形成一个元素序列直到铅(参看图4.1)就不再衰变了。铀(半衰期超过40亿年)不断地补充序列中的后续元素，所以，这些后面的元素被前面的元素替代的速度与他们衰变的速度同样快。

所有的绘画都含有少量的放射性元素铅—210(Pb^{210})和更少的镭—226(Ra^{226})。这两种元素都存在于白铅(铅氧化物)中，画家们用白铅作颜料已有2 000多年了。为了后面的分析，请注意下面这些事实，它们是很重要的，白铅是由铅金属产生的，而铅金属是经过熔炼从铅矿石中提取出来的。在这个过程中，矿石中的铅—210随铅金属被提取出来。不过90%～95%的镭以及它的派生物都随着炉渣中的废物被排出了。所以大多数铅—210的提供物都被排掉了，而铅—210开始迅速地衰变，其半衰期为22年。这个衰变过程一直持续到白铅中的铅—210再次与现存的少量镭达到放射平衡，

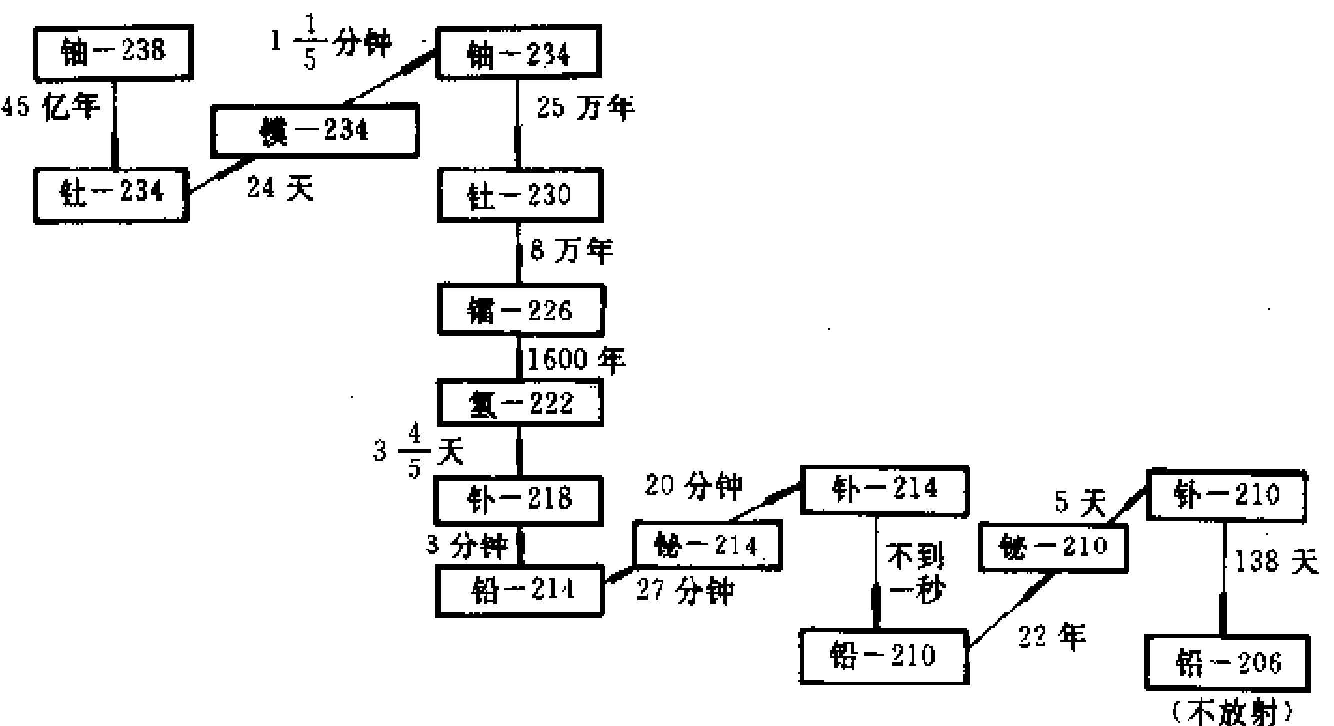


图 4.1　铀系列（箭头上的时间表示每一步的半衰期）

即铅－210的衰变恰好被镭的衰变所平衡。

现在让我们利用这个结论计算样品中现存的铅－210的数量，计算是基于最初生产时铅－210的数量。设 $y(t)$ 为 t 时刻每克白铅中铅－210的数量，y_0 为最初生产时 (t_0) 每克白铅中存在的铅－210的数量，而 $r(t)$ 为 t 时刻每分钟每克白铅中镭－226的衰变数。如果 λ 是铅－210的衰变常数，则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\lambda y + r(t),\quad y(t_0) = y_0. \tag{4}$$

因为我们只对最多300年这一时间期间感兴趣，所以可设镭－226保持常数(其半衰期为1 600年)，故 $r(t)$ 是一个常数 r. 用积分因子 $\mu(t) = e^{\lambda t}$ 乘微分方程的两端，得 $\mathrm{d}(e^{\lambda t}y)/\mathrm{d}t = re^{\lambda t}$. 因此

$$e^{\lambda t}y(t) - e^{\lambda t_0}y_0 = \frac{r}{\lambda}(e^{\lambda t} - e^{\lambda t_0}),$$

或

$$y = \frac{r}{\lambda}[1 - e^{-\lambda(t-t_0)}] + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)}. \tag{5}$$

现在 $y(t)$ 和 r 很容易测得。于是，如果我们知道 y_0，我们就可以利用(5)来计算 $(t-t_0)$，因而，我们就能确定画的年代。正如我们已指出的，虽然我们不能直接测得 y_0，但有一种可能的办法，它能帮助我们避开这个困难，这种办法就是利用这样的事实：铅－210的初始量是与用来提取铅金属的矿石中的大量的镭－226处于放射性平衡状态的。所以，让我们取不同的矿石样品，计算镭－226的衰变率。对各种矿石进行计算，结果见表1. 这些数字从0.18变化到140. 因而，生产时每分钟每克白铅中铅－210的衰变数将在0.18到140之间变动。因为铅－210的衰变数是与当时的量成比例的，这意味着 y_0 也将在一个大区间中变化。这样，我们就不能利用(5)得到一个精确的——或甚至是一个粗糙的——画的年代估计。不过，我们仍然能够利用(5)区别17世纪的画和现代的伪造品。这种方法的基础就是进行简单的观察，如果一幅画与铅的22年半衰期相比

非常旧，那么，在画的样品中，铅—210的放射量几乎等于这个样品中镭的放射量。另一方面，如果一幅画是现代作品（画龄20年左右），那么铅—210的放射量比镭的放射量要大得多。

表1　矿石与精矿样品

种类及来源	Ra^{226}的衰变/min
精矿(Oklahoma-Kansas)	4.5
压碎的粗矿石(S. E. Missouri)	2.4
精矿(S. E. Missouri)	0.7
精矿(Idaho)	2.2
精矿(Idaho)	0.18
精矿(Washington)	140
精矿(British Columbia)	1.9
精矿(British Columbia)	0.4
精矿((Bolivia)	1.6
精矿(Australia)	1.1

所有衰变率都是每分钟每克白铅。

通过下面的方法，我们可以使这一论据变得更精确。假设问题中的画或者非常新，或者大约有300年的历史。在(5)中设 $t - t_0 = 300$. 那么，作些简单的代数运算后，可看出

$$\lambda y_0 = \lambda y(t)e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1). \qquad (6)$$

如果我们的画确实是件现代的伪造品，那么 λy_0 就应不合理地大。为了确定什么是不合理的高衰变率，我们观察到（参见练习1.），在一个白铅样品中，如果铅—210最初（生产时）以每克白铅中100dis/min 的衰变率衰变，那么用来提取这些铅的矿石中，铀的含量为0.014%. 这样高的铀浓度是少有的，因为地壳岩石中铀的平均含量大约是每百万2.7份(2.7ppm)。另一方面，在西半球存在非常稀有的矿石，其中铀的含量是2%～3%. 为了可靠起见，如果每

克白铅超过30 000dis/min，我们就说铅—210的衰变速度肯定是不合理的。

为了计算生产时每克白铅每分钟内铅—210的衰变数 λy_0，必须计算铅—210现在的衰变率 $\lambda y(t)$，镭—226的衰变率 r，以及 $e^{300\lambda}$. 因为若干年后，钋—210(Po^{210})的衰变率等于铅—210的衰变率，而且钋—210的衰变率较易测得，我们就用钋的这些值代替铅—210的有关值。为计算 $e^{300\lambda}$，由(3)观察到 $\lambda = \ln 2/22$. 因此

$$e^{300\lambda} = e^{(300/22)\ln 2} = 2^{150/11}.$$

人们测定了《Emmaus 的信徒们》以及其它几种已确认的伪造品的钋—210和镭—226的衰变率，结果参见表2. 如果我们由(6)计算画《Emmaus 的信徒们》中白铅的 λy_0，得

$\lambda y_0 = 2^{150/11}(8.5) -^{*} 0.8(2^{150/11} - 1)$dis/min/g 的铅 $= 98\ 050$.

这个值大得简直叫人无法接受。因此，这幅画一定是现代的伪造品。用类似的分析(参看练习2～4)可以证明《洗足》,《读乐谱的妇人》,《弹曼陀林的妇人》这些画毫无疑问都是伪造 Vermeer 的。另一方面，正如某些专家所声称的，《做花边的人》和《欢笑的女孩》这些画不可能是最近伪造 Vermeer 的，因为这两幅画的钋—210与镭—226几乎接近放射平衡，而且在19世纪或20世纪的任何绘画样品中都没有观察到这样的平衡。

表2 原著被怀疑的油画

画　名	Po^{210}的衰变	Ra^{226}的衰变
Emmaus 的信徒们	8.5	0.8
洗足	12.6	0.26
读乐谱的妇人	10.3	0.3
弹曼陀林的妇人	8.2	0.17
做花边的人	1.5	1.4
欢笑的女孩	5.2	6

* 原文误为“+”。—— 译注

练　习

1. 在这个练习中，我们展示了如何由矿石中铅－210的衰变计算矿石中铀的浓度。

   a) 铀－238的半衰期是4.51×10^9yr. 因为这个半衰期很长，所以我们可以假设在200～300yr 期间，矿石中铀的数量是一个常数。设 $N(t)$ 表示 t 时刻每克普通铅矿石中所含的 U^{238}的原子数。因为，在矿石中铅－210与铀－238处于放射平衡，从而知道在 t_0 时刻铅的

   $$dN/dt = -\lambda N = -100\text{dis/min/g}.$$

   证明，t_0 时刻，每克普通铅矿石中含有3.42×10^{17}个铀－238原子。

   提示：1yr＝525 600min.

   b) 利用1摩尔铀－238重238g，1摩尔铀－238含6.02×10^{23}个原子，证明矿石中铀的浓度近似地为0.014％.

   对练习2，3及4中的画，利用表2中的数据，计算每克普通铅中白铅最初每分钟衰变的量，并得出结论，这些画中的每一幅都是伪造 Vermeer 的。

2. 《洗足》。
3. 《读乐谱的妇人》。
4. 《弹曼陀林的妇人》。
5. 下面的问题叙述了一个非常精确的关于铀的年代变化。

   a) 设 $N_{238}(t)$ 和 $N_{235}(t)$ 表示所给的一个铀样品在 t 时刻 U^{238}和 U^{235}的原子数，并且设 $t=0$ 为这个样品产生的时间。根据放射衰变律

   $$\frac{d}{dt}N_{238}(t) = \frac{-\ln 2}{(4.5)10^9}N_{238}(t),$$

   $$\frac{d}{dt}N_{235}(t) = \frac{-\ln 2}{0.707(10)^9}N_{235}(t).$$

   根据初始值 $N_{238}(0)$ 和 $N_{235}(0)$ 解这些方程，求出 $N_{238}(t)$ 和 $N_{235}(t)$.

   b) 1946年，在任何样品中，比值U^{238}/U^{235}为137.8. 假设任何样品在其产生时，含有等量的 U^{238}和 U^{235}，证明铀的寿命是5.96×10^9yr. 这个数字被普遍地接受为铀的寿命。

6. 最近，在一种铌钇矿样品中发现了3g 钍(Th^{232})。钍经反应：$Th^{232}\rightarrow Pb^{208}+6(4He^4)$，衰变为铅－208($Pb^{208}$). 人们确定出，样品中原先的钍的衰变产生了0.0376g 铅－208. 已知钍的半衰期139亿年，推导这种铌钇矿样品的年代。(提示：0.0376g. Pb^{208}是$(232/208)\times0.0376$g. 钍衰变的产物)。

测定考古发现物年代的最精确的方法之一就是碳－14断代法，它是由W. Libby大约在1949年发现的。这种方法的依据极其简单。地球的大气层不断地受到宇宙射线的轰击。这些宇宙射线在大气层中产生中子，而这些中子与氮结合产生C^{14}. C^{14}通常称为放射性碳，因为它作放射性衰变。这种放射性碳混合在二氧化碳中，在大气层中移动，被植物吸收。然后，动物吃下这些植物，向他们的组织中输送了放射性碳。在活组织内，C^{14}的吸收率恰好与C^{14}的衰变率平衡。然而，当一个组织死亡时，它便停止吸收C^{14}，这样C^{14}的浓度由于现存的C^{14}的衰变而减少。在物理学中有这样一个基本假设，宇宙射线对地球大气层的轰击速度总是常数。这就是说，在样品中，例如炭，C^{14}的初始衰变率与今天测得的衰变率一样。* 这个假设使我们能够确定炭样品的年代。设$N(t)$表示t时刻样品中C^{14}的现存量，而N_0为样品形成时$(t=0)$ C^{14}的数量。如果λ表示C^{14}的衰变常数(C^{14}的半衰期是5 568yr)，则$dN(t)/dt = -\lambda N(t)$，$N(0)=N_0$. 因而$N(t) = N_0e^{-\lambda t}$. 从而，样品中C^{14}目前的衰变率$R(t)=\lambda N(t)=\lambda N_0e^{-\lambda t}$，而初始衰变率$R(0)=\lambda N_0$. 于是$R(t)/R(0)=e^{-\lambda t}$，故$t=(1/\lambda)\ln(R(0)/R(t))$。因此，如果我们测量炭中$C^{14}$目前的衰变率$R(t)$并且注意到，$R(0)$一定等于可比较的活树木中$C^{14}$的衰变率，那么，我们就可以计算炭的年代$t$. 下面的两个问题是这个方法的实用例子。

7. 1950年，从法国著名的Lascaux洞穴中的居住材料上取得炭，给出平均计数0.97dis/min/g. 活树木给出的是6.68dis 估计居穴的年代，从而估计Lascaux洞穴中非凡的绘画的可能年代。

8. 1950年，在巴比伦王国的一个城市Nippur的屋梁中取得炭，计数得4.09 dis/min/g. 活树木给出的是6.68dis. 假设这种炭是在Hammurahi统治时期形成的，试估计Hammurahi继任的可能年代。

参 考 文 献

[1] P. Coremans, *Van Meegeren's Faked Vermeers and De Hooghs*. Amsterdam: Meulenhoff, 1949.

---

* 自50年代中期，核武器试验已大大地增加了大气层中的放射性碳。具有讽刺意义的是，这种不幸的状态给我们提供了确定艺术伪造品的一个有力的方法。须知，许多艺术品材料，例如亚麻油、帆布、纸等等，来自植物和动物，因此将与动、植物死亡时的大气含有同样的碳－14的浓度。因此，例如，近几年生产的亚麻油(来自亚麻)将比1950年以前生产的亚麻油所含的碳－14浓度高得多。

[2] B. Keisch, R. L. Feller, A. S. Levine, and P. R. Edwards, "Dating and authenticating works of art by measurement of natural alpha emitters, *Science*, 155, 1967, pp. 1238－1241.

[3] —, "Dating works of art through their natural radioactivity: Improvements and applications," *Science*, 160, 1968, pp. 413－415.

[4] —, *The Mysterious Box: Nuclear Science and Art, a World of the Atom series* booklet.

教 师 参 考

目的 本章的模型展示了白铅中某种物质是如何进行放射性衰变的，利用它证明 Rembrant 协会用170 000美元买下的著名绘画《Emmaus 的信徒们》是一件伪造的 Vermeer 作品。

预备知识 一阶线性非齐次微分方程。

时间 本章可讲一次或两次课。

第 5 章

单一群体模型

Martin Braun *

本章，我们将研究控制某些物种增长的一阶微分方程。乍一看，用一个微分方程建立一个物种的增长模型似乎是不可能的，因为任何一个物种的群体总是作整数量变化的。因此，任何物种的群体绝不可能是关于时间的可微函数。不过，如果一个给定的群体很庞大，而且突然增加的只是单一的个体，那么，这种变化与给定的群体规模相比是非常微小的。于是我们作这样的近似假设：大规模群体随时间连续地甚至可微分地变化。

设 $p(t)$ 表示一种给定物种在时刻 t 的总数，$r(t,p)$ 表示该物种出生率和死亡率之差。如果这个群体是孤立的，即不出现净迁出或迁入，那么总数的变化率 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t$ 就等于 $rp(t)$. 在大多数简化了的模型中，我们假定 r 是常数，即它不随时间或总数而变。于是，我们就可以写出下面的控制群体增长的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ap(t), a = \text{常数}.$$

这是一个线性方程，被称作群体增长的马尔萨斯律。如果所给物种

* Department of Mathematics, Queens College, Flushing, NY 11367.

在 t_0 时刻的总数是 p_0，则 $p(t)$满足初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = ap(t), p(t_0) = p_0.$$

这个初值问题的解是

$$p(t) = p_0\exp[a(t - t_0)].$$

因此，任何满足马尔萨斯群体增长规律的物种都随时间指数地增长。

我们刚才已经用公式表示出关于群体增长的一个非常简单的模型，这个模型如此简单，实际上只须用寥寥几行就能够完全求出其解。所以弄清楚这个简化的模型与实际情况是否有某种联系是很重要的。设 $p(t)$表示 t 时刻地球上的人类人口总数。据估计 1961 年地球上的人口总数为 3 060 000 000，而在以后的 t 年中，人口总数以每年 2% 的速度增长。这样 $t_0=1961$，$p_0=(3.06)10^9$，$a=0.02$，故

$$p(t) = (3.06)10^9\exp[0.02(t - 1961)].$$

用过去的人口总数肯定可以检验这个公式的结果。

结论 这个公式估计的 1700—1961 年间的人口总数竟是如此惊人的准确。地球上的人口总数每 35 年就翻了一番，而我们的方程预测每 34.6 年地球的人口总数将翻一番。为证明这一点，我们注意到地球上人类人口总数在 $T=t-t_0$ 内翻一番，其中 $e^{0.02T}=2$. 在这个方程的两边取对数，得 $0.02T=\ln 2$，故 $T=50\ln 2\approx 34.6$. 现在，让我们来看一下遥远的未来。我们的方程预测在 2510 年，地球上人口总数将是 2 000 000 亿，2635 年为 18 000 000 亿，2670 年为 36 000 000 亿。这都是些天文数字，它们的意义是难以评价的。我们这个星球的总表面积约为 18 600 000 亿 ft^2. 其中 80% 被水覆盖。假设将来我们愿意生活在船上，就如同在陆地上一样，容易看出到 2510 年，每人将只有 $9.3\mathrm{ft}^2$；到 2653 年，每人就剩 $1\mathrm{ft}^2$ 的立足之地；而到了 2670 年，我们只得互相踩着肩膀站成两层了。

所以，看来这个模型是不合理的，应该舍弃。不过，我们不能不顾下述事实，即这个模型与过去的数据惊人地一致。而且，我们有另外的根据，就是人口总数确实指数地增长。考虑一种很小的啮齿动物，其繁殖非常快。取单位时间为一个月并设群体以每月 40% 的速度增加，如果最初($t=0$)存在两个啮齿动物，那么，这种啮齿动物的数量 $p(t)$ 在 t 时刻满足初值问题

$$\frac{dp}{dt} = 0.4p(t), p(0) = 2$$

因而

$$p(t) = 2e^{0.4t}. \tag{1}$$

表 1 将所观察到的与由式(1)计算出的群体数作了比较，可以看出，两个结果相当一致。

表 1 啮齿动物的增长

月数	0	2	6	10
观察到的 P	2	5	20	109
计算出的 P	2	4.5	22	109.1

注 在这个实例中，观察到的 p 是非常准确的，因为这种动物的怀孕期是三个星期，而调查数据所需的时间相当短。如果怀孕期很短，那么观察到的 p 就不可能准确了，因为许多怀孕的啮齿动物在统计数据完成之前将会分娩。

如何摆脱困境呢？我们注意到，只要群体规模不很大，群体增长的线性模型就是令人满意的。不过，当群体异常地庞大时，这些模型就不会很准确了，因为它们不能反映这样的事实，即个体成员相互间要为有限的生存空间、自然资源以及可以得到的食物而进行竞争。这样，我们必须给我们的线性微分方程加上一个竞争项。因为每单位时间两个成员发生冲突的次数的统计平均与 p^2 成比例，这样，这个竞争项的一个合适的选择就是 $-bp^2$，其中 b 是一个常数。因此，我们考虑改进的方程

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2$$

这个方程被称作群体增长的逻辑律，数字 a、b 称为群体的生命系数。这个方程是由荷兰数学生物学家 Verhulst 在 1837 年第一个引进的。一般地，常数 b 与 a 相比将是非常微小的，所以如果 p 不是很大，那么 $-bp^2$ 这一项与 ap 相比将是微不足道的，群体将指数地增长。然而，当 p 很大时，$-bp^2$ 这一项就不能忽略了，它将减慢群体迅速的增长率。不用说，一个国家的工业化程度越高，它所拥有的生活空间就越大，食物就越丰富，系数 b 就越小。

现在，让我们利用这个逻辑方程预测一个孤立群体未来的增长。如果 p_0 为 t_0 时刻的总数，则 t 时的总数 $p(t)$ 满足初值问题

$$\frac{dp}{dt} = ap - bp^2, p(t_0) = p_0.$$

这是个可分离方程，其解为

$$\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{ar - br^2} = \int_{t_0}^{t} ds = t - t_0.$$

为了求函数 $1/(ar-br^2)$ 的积分，我们要求助于部分分式。设

$$\frac{1}{ar - br^2} \equiv \frac{1}{r(a - br)} = \frac{A}{r} + \frac{B}{a - br}.$$

为了求出 A 和 B，注意到

$$\frac{A}{r} + \frac{B}{a - br} = \frac{A(a - br) + Br}{r(a - br)} = \frac{Aa + (B - bA)r}{r(a - br)}.$$

所以 $Aa+(B-bA)r=1$. 因为这个方程对 r 的一切值均成立，故有 $Aa=1$，及 $B-bA=0$. 因此，$A=1/a$，$B=b/a$，且

$$\begin{aligned}\int_{p_0}^{p} \frac{dr}{r(a - br)} &= \frac{1}{a}\int_{p_0}^{p}\left(\frac{1}{r} + \frac{b}{a - br}\right)dr \\ &= \frac{1}{a}\left[\ln\frac{p}{p_0} + \ln\left|\frac{a - bp_0}{a - bp}\right|\right] \\ &= \frac{1}{a}\ln\left[\frac{p}{p_0}\left|\frac{a - bp_0}{a - bp}\right|\right].\end{aligned}$$

这样

$$a(t-t_0)=\ln\left[\frac{p}{p_0}\left|\frac{a-bp_0}{a-bp}\right|\right]. \tag{2}$$

易知$(a-bp_0)/(a-bp)$总是正的。因此

$$a(t-t_0)=\ln\left(\frac{p}{p_0}\cdot\frac{a-bp_0}{a-bp}\right).$$

对此方程的两边取指数，得

$$e^{a(t-t_0)}=\frac{p}{p_0}\cdot\frac{a-bp_0}{a-bp}$$

或

$$p_0(a-bp)e^{a(t-t_0)}=(a-bp_0)p.$$

把所有含 p 的项移到方程的左边，我们看到

$$[a-bp_0+bp_0e^{a(t-t_0)}]p(t)=ap_0e^{a(t-t_0)}$$

因此

$$p(t)=\frac{ap_0e^{a(t-t_0)}}{a-bp_0+bp_0e^{a(t-t_0)}}$$

$$=\frac{ap_0}{bp_0+(a-bp_0)e^{-a(t-t_0)}}. \tag{3}$$

现在我们来考虑(3)，看看它对群体的预测会是什么样的。注意到，当 $t\to\infty$ 时

$$p(t)\to\frac{ap_0}{bp_0}=\frac{a}{b}.$$

这样，不论初值怎样，群体规模总是趋于极限值 a/b，这个值称为微观世界的容纳量。其次，注意到，如果 $0<p_0<a/b$，$p(t)$是时间的单调递增函数。而且，因为

$$\frac{d^2p}{dt^2}=a\frac{dp}{dt}-2bp\frac{dp}{dt}=(a-2bp)p(a-bp)$$

我们看到，如果 $p(t)<a/(2b)$，则 dp/dt 是递增的，如果 $p(t)>a/(2b)$则 dp/dt 是递减的。因此，如果 $p_0<a/(2b)$，$p(t)$的图

形一定具有图 5.1 所示的形式。这样的曲线称为逻辑的或 S 形曲线。从它的形状可以得出结论，群体总数达到极限值的一半之前是一个加速增长时期，过了这一点，增长速度减慢并且迟早要达到零。这是一个增长递减时期。

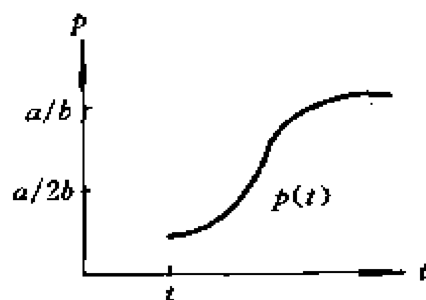


图 5.1　$p(t)$的图

数学生物学家 G. F. Gause 对属于原生动物门的草履虫做了一个实验，证实了这些预测。把五只草履虫个体放入一个很小的试管中，管内盛有 0.5cm³ 的培养基，每天计算一下个体的数量，共持续六天。结果发现，当数量不大时，这种草履虫以每天 230.9% 的速度增长。最初个体的数量迅速地增加，后来就比较慢了，到了第四天便达到 375 的最高水平，虫体占满了试管。从这个数据我们得出结论，如果草履虫依照逻辑律 $dp/dt=ap-bp^2$ 增长，那么 $a=2.309$，$b=2.309/375$. 因此，逻辑律预测

$$p(t)=\frac{(2.309)5}{\frac{5(2.309)}{375}+\left(2.309-\frac{5(2.309)}{375}\right)e^{-2.309t}}$$

$$=\frac{375}{1+74e^{-2.309t}}. \tag{4}$$

(我们已经把初始时间 t_0 取为 0.) 图 5.2 对比了由(4)预测的 $p(t)$ 与实际测量的 $p(t)$(用°表示)的图像。正如我们所看到的，一致性异常地好。

为了把我们的结果应用到对未来地球上人类人口的预测中，我们必须估计逻辑方程中控制人口增长的生命系数 a 和 b. 某些生态学家已经估算出 a 的正常值是 0.029. 我们还知道，当人口总数为 $(3.06)\times10^9$ 时，人类人口以每年 2% 的速率增长。因为 $(1/p)/(dp/dt)=a-bp$，我们看到

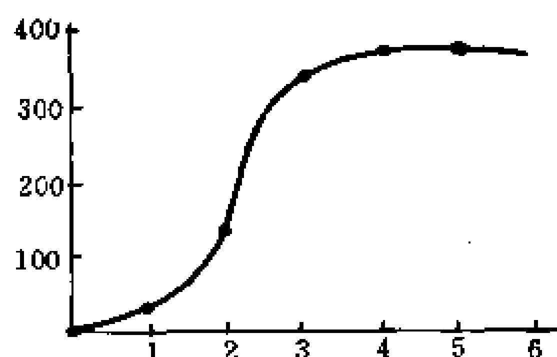


图 5.2 草履虫的增长

$$0.02 = a - b(3.06) \times 10^9.$$

因此，$b = 2.941 \times 10^{-12}$. 这样，根据群体增长的逻辑律，地球上的人类人口将趋于极限值

$$\frac{a}{b} = \frac{0.029}{2.941 \times 10^{-12}} = 9.86 \times 10^9(\text{人}).$$

注意，根据这个预测，到 1961 年我们仍位于逻辑曲线上加速增长部分，因为这时人口还没有达到预测的极限人口的一半。

作为对群体增长的逻辑律的另一种验证，考虑方程

$$p(t) = \frac{197\ 273\ 000}{1 + e^{-0.03134(t-1913.25)}}. \tag{5}$$

它是由 Pearl 和 Reed 作为美国人口模型（见[2]）提出的。这个模型是由下面的方式推导出的。首先，利用 1790 年、1850 年和 1910 年的人口普查数据，Pearl 和 Reed 由(3)求出 $a = 0.03134$ 以及 $b = (1.5887) \times 10^{-10}$（参看练习 2a）。然后简化(3)，他们算出人口到 1931 年 4 月达到它的极限人口 $a/b = 197\ 273\ 000$ 的一半（参看练习 2b）。因此（参看练习 2c），我们可以把(3)重写成比较简单的形式(5).

表 2 1790～1950 年美国人口

年	实际数	预测数	误差	百分比
1790	3 929 000	3 929 000	0	0.0
1800	5 308 000	5 336 000	28 000	0.5
1810	7 240 000	7 228 000	−12 000	−0.2
1820	9 638 000	9 757 000	119 000	1.2
1830	12 866 000	13 109 000	243 000	1.9
1840	17 069 000	17 506 000	437 000	2.6
1850	23 192 000	23 192 000	0	0.0
1860	31 443 000	30 412 000	−1 031 000	−3.3
1870	38 558 000	39 372 000	814 000	2.1
1880	50 156 000	50 177 000	21 000	0.0
1890	62 948 000	62 769 000	−179 000	−0.3
1900	75 995 000	76 870 000	875 000	1.2
1910	91 972 000	91 972 000	0	0.0
1920	105 711 000	107 559 000	1 848 000	1.7
1930	122 775 000	123 124 000	349 000	0.3
1940	131 669 000	136 653 000	4 984 000	3.8
1950	150 697 000	149 053 000	−1 644 000	−1.1

(后面的四组数据是由 Dartmouth 学院写作组加上的。)

表 2 把 Pearl 和 Reed 的预测数与美国人口的观测数作了比较。这些结果是值得注意的，特别是，因为我们没有把移民进入美国以及这期间美国五次卷入战争中所造成的大规模人口波动算进去。

1845 年，Verhulst 预言比利时人口最大值是 6 600 000，法国是 40 000 000. 可是到 1930 年，比利时的人口就已经是 8 092 000. 这样大的差异似乎表明人口增长的逻辑律是很不准确的，至少就比利时的人口而论是这样的。不过，对这种差异我们可以这样来解释，一是由于比利时工业惊人的崛起，再则是由于刚果的发现，使国家有充足的外来资源提供给这些额外的人口。这样，在发现了刚果以及比利时工业惊人地崛起之后，Verhulst 就应减小生命系数 b 了。

另一方面，1930 年法国的人口总数与 Verhulst 的预测却非常一致。事实上，我们可以回答下面这个逗弄人的自相矛盾的事情：为什么 1930 年法国人口增长得非常缓慢，而在加拿大的法裔人数却增加得非常迅速？毕竟他们是同一人种！答案是这样的，1930 年法国的人口已经非常接近它的极限值，因此早已进入增长递减期间，而 1930 年加拿大的人口仍处于加速增长期间。

注

1. 显然，技术的发展，对污染的考虑，以及社会发展趋势对生命系数 a 和 b 都有重要影响。所以，每隔几年就要重新估计它们的值。

2. 要推导出更准确的群体增长模型，我们就不应该把群体看作是由一群同类的个体组成的，而应该将其细分为不同的年龄组。因为群体的繁殖更多地取决于雌性的数量，所以，我们还应将群体分为雄性与雌性。

3. 对群体增长的逻辑律的最严厉的批评或许就是，人们已经观察到某些群体在两个值之间周期性地波动，而在一条逻辑曲线中不存在任何类型的波动。不过，对有些波动可这样来解释，当某些群体达到充分高的密度时，它们就比较容易受各种流行病的影响。流行病使群体总数降低到一定程度后，群体又开始增长，直到总数足够大时流行病又开始传播。在练习 7 中我们推导出一个模型来描述这种现象，并且我们把这个模型应用到练习 8 中以解释大群微小啮齿动物的突然出现和消失。

练　　习

1. 证明对于 $t_0<t<\infty$，$(a-bp_0)/(a-bp(t))$ 是正的。

   提示：利用(2)证明如果 $p_0\neq a/b$，$p(t)$ 决不会等于 a/b。

2. a) 选择三个时间 t_0，t_1，t_2，且 $t_1-t_0=t_2-t_1$。

证明根据 $t_0, p(t_0), t_1, p(t_1), t_2$ 及 $p(t_2)$，(3)唯一地确定 a 和 b。

b) 证明美国人口的加速增长时期终止到1913年4月(根据Pearl和Reed的模型)。

c) 设一群体 $p(t)$ 根据逻辑律(3)增长，并设 $\bar{t}$ 为达到极限总数的一半的时间。证明

$$p(t)=\frac{\frac{a}{b}}{1+e^{-a(t-\bar{t})}}.$$

3. 1879年和1881年，人们在新泽西用拖网捕获了大量周岁左右的欧洲鲈鱼，把它们装进水箱里用火车运送，穿过大陆，放入旧金山海湾养殖。经过这两次艰苦的旅行，活下的有条纹欧洲鲈鱼总共只剩下435尾。然而，到1899年，仅商业净捕获量就有1 234 000lb. 因为这种群体的增长这么快，有理由假设它服从马尔萨斯律 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=ap$。假设一条欧洲鲈鱼的平均重量是3lb，并且1899年捕获了整整十分之一的欧洲鲈鱼，求出 a 的一个下界。

4. 一群体按逻辑律增长，极限总数是 5×10^8 个个体。当群体总数较少时，每40min翻一番。在下列每一种初值情况下，2h后群体总数将是多少？

a) 10^8；

b) 10^9.

5. 在阿拉斯加海湾附近生活着一种大马哈鱼，它们服从马尔萨斯的群体增长律 $\mathrm{d}p/\mathrm{d}t=0.003p(t)$，其中 t 以分钟度量。在 $t=0$ 时一群鲨鱼来到这些海域栖身并开始捕捉这里的大马哈鱼。鲨鱼吞食大马哈鱼的速度是 $0.001p^2(t)$，其中 $p(t)$ 为 t 时刻大马哈鱼的总数。而且，由于一个不受欢迎的成员进入到它们的领域，每分钟有0.002条大马哈鱼离开阿拉斯加海域。

a) 修改马尔萨斯的群体增长律使之将这两个因素包含进去。

b) 设 $t=0$ 时有一百万条大马哈鱼。观察群体总数在 $t\to\infty$ 时会发生什么情况？

6. 如果不考虑大量移民以及高杀人率，纽约城的人口将满足逻辑律

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{25}p-\frac{1}{25\times10^6}p^2$$

其中 t 以年度量。

a) 修改这个方程，使之包含：每年有6 000人从该城市迁出，有4 000人被杀这些因素。

b) 假设1970年纽约城的人口为8 000 000. 求出在未来任意时刻的人口。$t\to\infty$ 时会发生什么情况？

7. 假设一群体对流行病很敏感，我们可以用下面的方式建立它的模型。设该群体最初受逻辑律

$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2 \tag{i}$$

控制，并且一旦 p 达到某个小于极限总数 a/b 的特定值 Q，流行病便开始传播。在此阶段中生命系数 $A<a$、$B<b$，且(i)被

$$\frac{dp}{dt}=Ap-Bp^2 \tag{ii}$$

所代替。假设 $Q>A/B$. 于是群体开始减少。当群体减少到某一值 $q>A/B$ 时，就达到一个特定时刻。在这个时刻流行病停止传播，群体又开始遵循(i)而增长，直到新的流行病发生。这样在 q 与 Q 之间 p 发生周期性的波动。现在我们要指出如何计算这些波动的周期。

a) 证明当 p 从 q 增加到 Q 时，周期的第一部分 T_1 为

$$T_1=\frac{1}{a}\ln\frac{Q(a-bq)}{q(a-bQ)}$$

b) 证明当 p 从 Q 减到 q 时，周期的第二部分 T_2 为

$$T_2=\frac{1}{A}\ln\frac{q(QB-A)}{Q(qB-A)}.$$

这样整个周期的时间为 T_1+T_2.

8. 据观察，每当老鼠过多时在鼠群中就会出现瘟疫。而且，密度的局部增加将会引起捕食者蜂拥而来。由于这两个因素，在两到三个星期内，一个小啮齿动物群体的 97%～98% 就会被吞食掉。尔后，它的密度降到疾病不能传播的水平。待减少到最高值的 2% 时，鼠群便从被大量捕食的困境中解脱出来，食物丰富了。于是，鼠群又开始增长，直到到达促使另一次疾病传播和捕食者高峰的水平。老鼠的繁殖速度如此之快，因此，我们可以在练习 7 的(i)中置 $b=0$. 恰恰相反，在周期的第二部分，A 与 B 相比却非常小，故在(ii)中可忽略掉 A.

a) 在这些假设下，证明

$$T_1=\frac{1}{a}\ln\frac{Q}{q}\quad 及\quad T_2=\frac{Q-q}{qQB}.$$

b) 设 T_1 近似地为 4y.，Q/q 近似地为 50，证明 a 近似地为 1. 顺便说一下，a 的这个值非常符合老鼠在自然环境中的繁殖率。

参 考 文 献

[1] G. F. Gause, *The Struggle for Existence*, *New York*: Hafner, 1964.

[2] R. Pearl and L. J. Reed, *Proc. Nat. Acad. Sci.* , Vol. 6p. 275, 1920.

教 师 参 考

目的 本章的目标就是推导出群体增长模型的微分方程，从而预测将来的群体。把群体的预测结果与已知数据作比较。

预备知识 预先熟悉一下可分离微分方程。

时间 用1～2课时。

第 6 章

技术革新的推广

Martin Braun *

长期以来，经济学家和社会学家们一直关注着如何在行业中推广技术改造或革新。一旦一家企业采用了一项革新，那么，该行业中其它企业将以怎样的速度接受这项革新？哪些因素决定着他们跟上来的速度？本章，我们要构造一个描述在农场主中推广革新的模型，然后证明同样的模型也适用于烟煤、钢铁、酿造及铁路等不同行业。

假设在 $t=0$ 时，一项新的革新被介绍到一个确定的拥有 N 个农场主的社会里。设 $p(t)$ 表示 t 时刻采纳该项革新的农场主的数量。同上一章一样，尽管 $p(t)$ 显然是作整数变化的，但我们仍把它近似地视为时间的连续函数。关于革新的推广，我们可以作一种最简单的实际假设：对于一位尚未采纳某项革新的农场主来说，只有当一位已经采用了这项革新的农场主对他谈论了这项革新之后，他才可能会采纳它。于是，在很短的时间区间 Δt 内采纳这项革新的农场主数 Δp 与在此之前已经采纳了这项革新的农场主数 p 以及还不知道这项革新的农场主数 $N-p$ 成正比。因此，对某个正

* Department of Mathematics, Queens College, Flushing, NY 11367.

常数 c，

$$\Delta p = cp(N - p)\Delta t$$

或

$$\frac{\Delta p}{\Delta t} = cp(N - p).$$

令 $\Delta t \to 0$，得微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = cp(N - p) \qquad (1)$$

如果置 $a=cN, b=c$，这就是前一章的逻辑方程。设 $p(0)=1$，即在 $t=0$ 时有一个农场主采纳了这项革新。我们看到 $p(t)$ 满足初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = cp(N - p), p(0) = 1 \qquad (2)$$

(2)的解为

$$p(t) = \frac{Ne^{cNt}}{N - 1 + e^{cNt}} \qquad (3)$$

这是一个逻辑函数*。于是，我们的模型预计，采纳过程加速到有半数的农场主知道了这项革新时，便开始减速，直到最终达到零。

我们来比较一下模型的预测与 20 世纪 50 年代中期两项革新技术在美国农业社会中推广的有关数据。图 6.1 表示 1944－1955 年间在衣阿华州采用 2,4-D 除草喷雾器的农场主的累加数字；图 6.2 表示 1934－1958 年间美国三个州的杂交玉米种植面积占整个玉米种植面积的累加百分比。这些图形中有圆圈的就是实际测量值，把这些测量值用直线连接起来便得到图像。可以看出，这些曲线具有逻辑曲线的所有性质，而且总的说来与模型吻合得非常好。不过，也有两个不一致的地方。首先，采纳过程并不总是在有

---

* 关于逻辑函数的分析，参看本卷第 5 章。

半数的农场主采纳了该项革新时就停止加速。从图 6.2 可以看出，在亚拉巴马州直到将近有 60% 的农场主采用了杂交玉米技术后采纳过程才开始减速。第二，采纳过程的后面阶段与模型的吻合比前面阶段好得多。

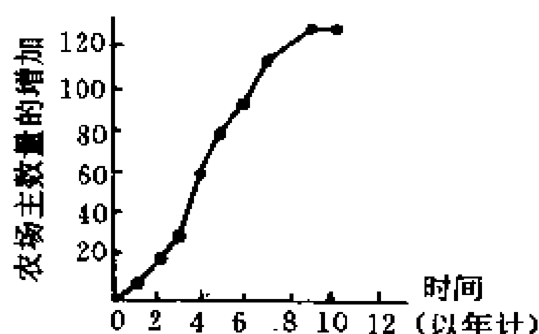


图 6.1 在衣阿华州采用 2,4-D 除草喷雾器的农场主的累加数

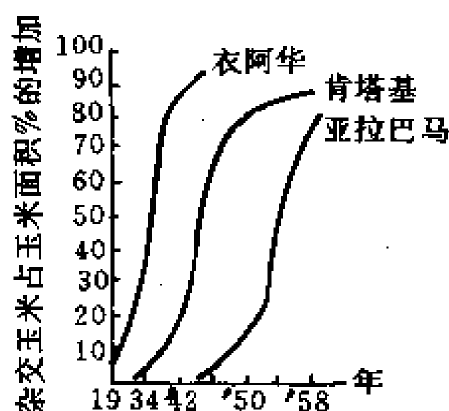


图 6.2 美国三个州的杂交玉米种植面积与整个玉米种植面积的累加百分比

第二个不一致性的根源，在于我们假设的一个农场主仅仅是通过与别的农场主接触才学会了一项新事物。事实并不完全如此，研究表明，大量的通讯宣传工具，如收音机、电视、报纸，以及农业期刊等在采纳过程的前期阶段起了很大作用。所以，我们还须在微分方程(1)中加上一项，从而把这个因素考虑进去。为计算这一项，我们假设在一个短时间 Δt 内，通过大众通讯宣传工具学会某种新

事物的农场主数 Δp 与还不知道这种新事物的农场主数成比例，即对某个正常数 c'

$$\Delta p = c'(N - p)\Delta t,$$

令 $\Delta t \to 0$，我们看到，单位时间内有 $c'(N-p)$ 个农场主通过大众通讯宣传工具学会这种新事物。这样，如果 $p(0)=0$，则 $p(t)$ 满足初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = cp(N - p) + c'(N - p), p(0) = 0 \tag{4}$$

(4)的解是

$$p(t) = \frac{Nc'[e^{(c'+cN)t} - 1]}{cN + c'e^{(c'+cN)t}} \tag{5}$$

在练习 2 和 3 中，我们将指出如何确定曲线(5)的形状。

适当选择 c' 和 c，修改后的曲线(5)便与图 6.1 和图 6.2 非常理想地一致了。不过(参看练习 3.c)，这仍然不能解释，为什么在亚拉巴马州直到 60%的农场主采用了杂交玉米这项新技术后，采纳过程才开始减速。当然，这说明可能某些其它因素在采纳过程中起了重要作用，而这些因素在任何模型中都必须予以考虑。例如，可能没有考虑到，一个农场主首次学习一项新技术与他实际采用这项新技术之间的时间间隔等。

现在，我们要证明，本世纪初叶，一些主要的技术改革在烟煤、钢铁、酿造以及铁路等不同行业中被采纳的速率也受微分方程

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = cp(N - p)$$

的控制。这种想法简直令人意外，因为我们会认为，某个行业内采纳一项新技术的企业数量必然依赖于该技术的效益和所需要的投资，而在推导(1)的过程中，我们并没有提到这些因素。不过，正如我们不久将会看到的那样，这两种因素将隐含在常数 c 中。

设 n 表示某一行业中企业的总数，在 t 时刻该行业已经采纳了一项新技术。显然，在一个很短的时间 Δt 内，采纳该项技术的企

业数量 Δp 与还未采纳的企业数量成比例，即

$$\Delta p = \lambda(n - p)\Delta t.$$

令 $\Delta t \to 0$，我们看到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \lambda(n - p).$$

比例因子 λ 依赖于相对其它投资而言装备这种技术的效益 π、为了装配这种技术需要的投资占企业总资产的百分比 s 以及已经采用该项技术的企业的百分比。于是

$$\lambda = f(\pi, s, p/n).$$

将 f 展成 Taylor 级数并舍去三阶或更高阶项，得

$$\lambda = a_1 + a_2\pi + a_3 s + a_4\left(\frac{p}{n}\right) + a_5\pi^2 + a_6 s^2 + a_7\pi s + a_8\pi\left(\frac{p}{N}\right) + a_9 s\left(\frac{p}{n}\right) + a_{10}\left(\frac{p}{n}\right)^2.$$

50 年代末，卡内基-梅隆大学的 Edwin Mansfield 调查了 12 项新技术在 4 个主要行业中的推广[1]。在详尽研究的基础上，Mansfield 得出结论 $a_{10} = 0$ 且

$$a_1 + a_2\pi + a_3 s + a_5\pi^2 + a_6 s^2 + a_7\pi s = 0$$

这样，令

$$k = a_4 + a_8\pi + a_9 s, \tag{6}$$

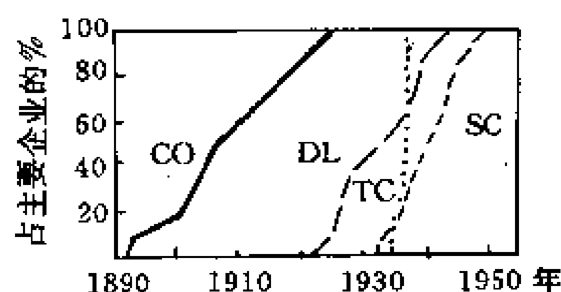
我们看到

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = k\,\frac{p}{n}(n - p)$$

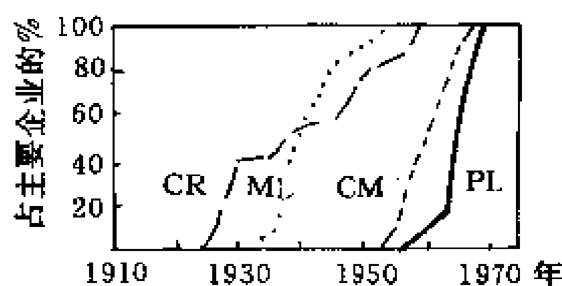
（如果我们令 $k/n = c$，这就是在前面得到的关于新技术在农场主中推广的方程。）假设一项新技术在 t_0 年最初为一家企业所采用。则 $p(t)$ 满足初值问题

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = \frac{k}{n}p(n - p),\ p(t_0) = 1. \tag{7}$$

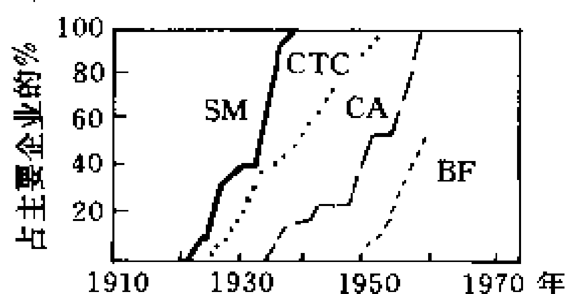
而这意味着



(a)



(b)



(c)

图 6.3 烟煤、钢铁、酿造、铁路中引进 12 项新技术的主要企业的增长百分比。(a) 副产品炼焦炉(CO)，内燃机火车头(DL)，罐头(TC)，短距运行车辆(SC)。(b) 车箱减速器(CR)，无轨机械装载机(ML)，连续采矿机(CM)，货盘装载机(PL)。(c) 连续宽带轧钢机(SM)，集中化的交通控制(CTC)，连续退火线(CA)，高速装瓶机(BF)。

$$p(t) = \frac{n}{1 + (n-1)e^{-k(t-t_0)}}.$$

Mansfield 研究了 12 项新技术的使用在烟煤、钢铁、酿造以及铁路四种主要行业中从一个企业推广到另一个企业的速率问题。这些新技术是：短距运行车辆、无轨机械装载机、连续采矿机（烟煤行业）、副产品炼焦炉、连续宽带轧钢机、马口铁连续退火线（钢铁行业）、货盘装载机、罐头、高速装瓶机（酿造业）以及内燃机车、集中化的交通控制、车箱减速器（铁路行业）。他的结论显示于图 6.3 中。除副产品炼焦炉和罐头外，其它所有技术都是从引进那年开始，每隔两年给出一个百分比。副产品炼焦炉的区间长为六年，而罐头为六个月。注意这些曲线是如何具有逻辑曲线的一般形状的。

欲将模型(7)的预测与这些观测到的结果作一番更详细的比较，则必须对 12 项革新中的每一项估算常数 n，k 及 t_0. 表 1 给出了 12 项革新中每一项的 n，t_0，a_4，a_5，a_9，π 及 s 的值；常数 k 可由(6)算出。练习 5 和 6 的答案将指出，(7)预测的这 12 项革新的采纳速度相当准确。

表 1

新技术	n	t_0	a_4	a_5	a_9	π	s
内燃机火车头	25	1925	−0.59	0.530	−0.027	1.59	0.015
集中化的交通控制	24	1926	−0.59	0.530	−0.027	1.48	0.024
车箱减速器	25	1924	−0.59	0.530	−0.027	1.25	0.784
连续宽带轧钢机	12	1924	−0.52	0.530	−0.027	1.87	4.908
副产品炼焦炉	12	1894	−0.52	0.530	−0.027	1.47	2.083
连续退火线	9	1936	−0.52	0.530	−0.027	1.25	0.554
短距运行车辆	15	1937	−0.57	0.530	−0.027	1.74	0.013
无轨机械装载机	15	1934	−0.57	0.530	−0.027	1.65	0.019
连续采矿机	17	1947	−0.57	0.530	−0.027	2.00	0.301
罐头	22	1935	−0.29	0.530	−0.027	5.07	0.267
高速装瓶机	16	1951	−0.29	0.530	−0.027	1.20	0.575
货盘装载机	19	1948	−0.29	0.530	−0.027	1.67	0.115

练　　习

1. 证明初值问题(2).
2. 在(5)中令 $c=0$. 证明 $p(t)$ 从 0 单调地增加到 N，而且没有拐点。
3. 这里给出一个确定曲线(5)的特性的渐进式讨论。如果 $c'=0$，则有一条逻辑曲线，而如果 $c=0$，则具有练习 2 中描述的那种特性。这样，如果 c 相对于 c' 来说很大，那么，我们有一条逻辑曲线；反之，则具有练习 2 中说明的那种特性。
   a) 设 $p(t)$ 满足(4). 证明
   $$\frac{d^2p}{dt^2}=(N-p)(cp+c')(cN-2cp-c').$$
   b) 证明当且仅当 $c'/c<N$ 时 $p(t)$ 有一个拐点，且在该点处，dp/dt 达最大值。
   c) 设 $p(t)$ 在 $t=t^*$ 处有一个拐点。证明 $p(t)\leqslant N/2$.
4. 解初值问题(7)。
5. 看来有理由将从 20% 的企业引进一项新技术到 80% 的企业引进该项新技术的一段时间用以衡量仿效速度。
   a) 证明从我们的模型中得出的这段时间是 $4(\ln 2)/k$.
   b) 对所讲的 12 项技术中的每一项，由表 1 中的数据算出这段时间，并与在图 6.3 中观测到的结果进行比较。
6. a) 证明根据我们的模型，在 50% 的企业引进一项新技术之前要经过 $(1/k)\ln(n-1)y_r$.
   b) 计算在引进这 12 项新技术的过程中每一项的上述时耗，并与从图 6.3 中观测到的值进行比较。

参　考　文　献

[1] E. Mansfield, "Technical Change and the Rate of Imitation," *Econometrica*, vol. 29, no. 4, Oct. 1961.

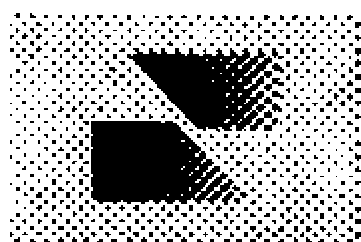
教　师　参　考

目的　逻辑模型应用于不同行业中的新技术推广。将模型的

预测与实际的数据进行比较。

预备知识　可分离变量的微分方程的求解。

时间　1～2 课时。



第Ⅲ部分

高阶线性模型

第 7 章

关于糖尿病检测的一个模型

Martin Braun [*]

糖尿病是一种新陈代谢疾病，临床表现为血液和尿中含有过多的糖。患有糖尿病的人，因自身不能提供足够的胰岛素，从而不能消耗完体内所有的糖、淀粉类食物以及碳水化合物。常用的诊断糖尿病的方法是GTT(葡萄糖耐量检查)。做这种检查，要求病人在去医院的头天晚上禁食，然后给他输一大剂量的葡萄糖(血液中的糖通常以这种形式出现)。在以后的3～5h内，对病人血液中的葡萄糖浓度作几次测量，这些测量结果被用于糖尿病的诊断。使用这种诊断方法时有一个严重困难，就是对GTT结果的解释没有一个公认的标准。对一次GTT结果，三位医生可能会作出三种不同的诊断。在最近的一个病例中，对一次GTT结果，罗得岛的一位医生经过再三推敲后，确诊病人患有糖尿病。而第二位医生则宣布病人是正常的。为解决这个问题，他们把GTT结果寄给波士顿的一位专家。在检查了这些结果后，这位专家得出结论，病人患有脑垂体肿瘤。

* Department of Mathematics, Queens College, Flushing, NY 11367.

20 世纪 60 年代中期，Mayo 诊所的 Rosevear 和 Molnar 博士以及明尼苏达大学的 Ackerman 和 Gatewood 博士发现了一个十分可靠的解释 GTT 结果的标准(见[1])。这个发现来自一个非常简单的模型，他们用这个模型研究血糖调节系统。他们的模型基于下面这些简单的事实，这些事实在初等生物学中是众所周知的。

1. 在任何脊椎动物的新陈代谢过程中，葡萄糖起着重要的作用，因为它是所有组织和器官的能源。每个个体都有一个最佳血糖浓度，任何与最佳浓度的过度偏差，都会引起严重的病态甚至导致死亡。

2. 血糖浓度在其自我调节过程中，受到各种激素和其它代谢物的影响和控制。其中有

(i) **胰岛素**，由胰岛的 β 细胞所产生的一种蛋白质激素。吃下碳水化合物后，我们的肠胃系统就向胰岛发出信号，使之分泌更多胰岛素。此外，血液中的葡萄糖直接刺激胰腺的 β 细胞分泌胰岛素。通常，人们认为胰岛素会附在不可渗透的薄膜壁上，使葡萄糖可以通过细胞膜而进入细胞中央(大多数生物化学反应都在此进行)，从而促进组织对葡萄糖的吸收。没有充分的胰岛素，人体就不能利用它所需要的全部能量。

(ii) **胰高血糖素**，由胰岛 α 细胞分泌的蛋白质激素。任何剩余的葡萄糖都以糖原的形式贮藏在肝脏内，需要时，这些糖原又转化成葡萄糖。激素胰高血糖素加快了糖原向葡萄糖分解的速度。迄今为止收集的数据清楚地表明，低血糖促进胰高血糖素的分泌，而高血糖则抑制它的分泌。

(iii) **肾上腺素**，肾上腺髓质分泌的一种激素。肾上腺素是某种紧急机制的一部分，在极端低血糖时，它能很快增加血液中的葡萄糖浓度。像胰高血糖素一样，肾上腺素增加糖原向葡萄糖分解的速度。此外，它直接抑制肌肉组织对葡萄糖的吸收；作用于胰腺以抑制胰岛素分泌；它还有助于肝脏内乳酸向葡萄糖的转化。

(iv) **糖皮质激素**,如皮质醇一类的由肾上腺皮质分泌的激素。糖皮质激素在碳水化合物的代谢过程中起着重要的作用。

(v) **甲状腺素**,由甲状腺分泌的一种激素。这种激素有助于肝脏从甘油、乳酸、以及氨基酸这样的非碳水化合物中生成葡萄糖。

(vi) **生长激素**,由垂体前叶腺分泌的一种激素。生长激素不仅直接影响葡萄糖水平,而且还有对抗胰岛素的作用。人们认为,生长激素会降低肌肉和脂膜对胰岛素的敏感性,从而降低胰岛素促进葡萄糖吸收的效率。

Ackerman 等人试图构造一个模型,从而准确地描述 GTT 过程中的血糖调节系统,在这个模型中将用一两个参数来区别正常人与轻微的或前期的糖尿病患者。他们的模型是一个大大简化了的模型,在做 GTT 期间只需要有限数量的血样。这个模型将注意力集中于两个浓度,即血液中的葡萄糖浓度(用 G 表示)和激素的净浓度(用 H 表示)。后者表示所有有关激素的总效果。像胰岛素这样的降低血糖浓度的激素被认为将增加 H,而像皮质醇这样的增加血糖浓度的激素被认为将减少 H. 这样一个简化的模型仍然能够提供一个关于血糖调节系统的准确描述有两方面原因。第一,研究表明,在正常或接近正常的情况下,一种激素,即胰岛素,与血糖的相互作用如此占优势,以至于一个简单的"浓缩参数模型"就足够了;第二,有证据指出,血糖量正常不必依赖于血糖调节系统的每一个动力学机制都正常。它依赖于血糖调节系统的整个工作情况,这个系统受着胰岛素一葡萄糖相互作用的控制。

这个基本模型的解析描述由下列方程给出

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t}=F_1(G,H)+J(t) \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}=F_2(G,H). \tag{2}$$

F_1 和 F_2 依赖于 G 和 H,表明 G 和 H 的变化由 G 和 H 的值共同

决定。函数 $J(t)$ 为引起血糖浓度增加的外部速率。假定禁食人到达医院时，他的 G 和 H 达到最佳值 G_0 和 H_0. 这意味着

$$F_1(G_0,H_0)=0,$$
$$F_2(G_0,H_0)=0$$

因为我们感兴趣的是 G 和 H 对它们的最佳值的偏差，作变换

$$g=G-G_0, h=H-H_0.$$

那么

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=F_1(G_0+g,H_0+h)+J(t)$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=F_2(G_0+g,H_0+h).$$

考察

$$\begin{aligned}&F_1(G_0+g,H_0+h)\\&=F_1(G_0,H_0)+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h+e_1\end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned}&F_2(G_0+g,H_0+h)\\&=F_2(G_0,H_0)+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h+e_2\end{aligned}$$

其中 e_1 和 e_2 与 g 和 h 相比非常小。因此，假定 G 和 H 只是稍微偏离 G_0 和 H_0，就可以忽略 e_1 和 e_2，我们看到

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_1(G_0,H_0)}{\partial H}h+J(t) \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial F_2 G_0,H_0)}{\partial G}g+\frac{\partial F_2(G_0,H_0)}{\partial H}h. \tag{4}$$

我们无法预先确定 $\partial F_1(G_0,H_0)/\partial G$, $\partial F_1(G_0,H_0)/\partial H$, $\partial F_2(G_0,H_0)/\partial G$，以及 $\partial F_2(G_0,H_0)/\partial H$ 的值，但是我们可以确定它们的符号。参照图 7.1，不难看出，当 $g>0$ 和 $h=0$ 时，$\mathrm{d}g/\mathrm{d}t$ 为负值，因为，通过组织对葡萄糖的吸收和将过量的葡萄糖以糖原的形式贮

藏于肝脏内，血糖浓度将降低。所以，$\partial F_1(G_0,H_0)/\partial G$ 必为负的*。类似地，$\partial F_1(G_0,H_0)/\partial H$ 是负的，因为 h 的一个正值将趋于降低血糖水平，而这种降低是通过促进组织对葡萄糖的吸收和增加葡萄糖向糖原转化的速度产生的。$\partial F_2(G_0,H_0)/\partial G$ 必定是正的，因为 g 的一个正值将引起内分泌腺分泌激素使 H 增加。最终，$\partial F_2(G_0,H_0)/\partial H$ 一定是负的，因为通过激素的新陈代谢，血液中的激素浓度将降低**。

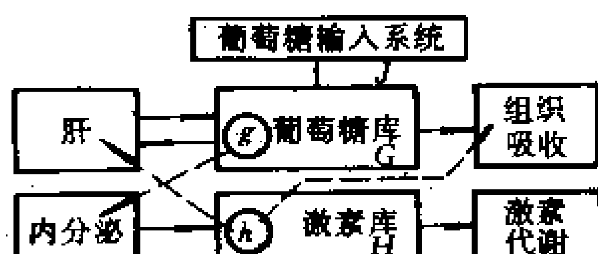


图 7.1　血糖调节系统的简化模型

这样，我们可将(3)和(4)写成如下形式

$$\frac{dg}{dt} = -m_1 g - m_2 h + J(t) \tag{5}$$

$$\frac{dg}{dt} = -m_3 h + m_4 g \tag{6}$$

其中 m_1, m_2, m_3 以及 m_4 均为正常数。方程(5)和(6)是两个关于 g 和 h 的一阶方程。由于我们只测量血液中葡萄糖的浓度，所以，我们希望消去变量 h. 下述方法可达到此目的对(5)求关于 t 的导数，给出

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_1\frac{dg}{dt} - m_2\frac{dh}{dt} + \frac{dJ}{dt}.$$

---

* 以上论述对于确定 $\partial F_1(G_0,H_0)/\partial G$ 为负值有效，但确定 dg/dt 为负须以 $J(t)=0$ 为前提。——译注。

** 更确切地：因为通过激素的新陈代谢和新激素的不断产生，血液中的激素浓度将趋于最佳值。

利用(6)代换 dh/dt，得

$$\frac{d^2g}{dt^2} = -m_2\frac{dg}{dt} + m_2m_3h - m_2m_4g + \frac{dJ}{dt}. \tag{7}$$

又注意到，由(5)，$m_2h = -(dg/dt) - m_1g + J(t)$. 因此，$g(t)$满足二阶线性微分方程

$$\frac{d^2g}{dt^2} + (m_1 + m_3)\frac{dg}{dt} + (m_1m_3 + m_2m_4)g = m_3J + \frac{dJ}{dt}.$$

把这个方程重新写成如下形式

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = S(t). \tag{8}$$

其中 $\alpha = (m_1 + m_2)/2$，$\omega_0^2 = m_1m_3 + m_2m_4$，$S(t) = m_3J + (dJ/dt)$.

注意到，除了注入葡萄糖的一个极短的时间间隔外，在其它时刻，(8)的右边都为零。利用 Dirac 的 δ-函数，可以有效地研究这样的函数。此外，为了我们的目的，取葡萄糖完全被吸收的时刻 $t=0$. 则对于 $t>0$，$g(t)$满足二阶线性齐次方程

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \omega_0^2 g = 0. \tag{9}$$

这个方程具有正系数。因此，(参看练习 5)当 t 趋于无穷时，$g(t)$趋于零。这样，我们的模型在预言血糖浓度最终趋于最佳浓度这一点上，肯定与实际一致。

(9)中 $g(t)$的解有三种不同类型，这依赖于 $\alpha^2-\omega_0^2$ 是正的、负的还是零。我们将假设 $\alpha^2-\omega_0^2$ 是负的；其它两种情况的处理与之相似。如果 $\alpha^2-\omega_0^2<0$，则(9)的特征方程有复根。容易验证，在这种情况下(参看练习 1)(9)中 $g(t)$的每一个解具有如下形式

$$g(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta), \omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \tag{10}$$

因此

$$G(t) = G_0 + Ae^{-\alpha t}\cos(\omega t - \delta). \tag{11}$$

(11)含有 5 个未知数：G_0、A、α、ω_0 以及 δ. 下面是一种确定它们的方法：在注入的葡萄糖被吸收之前，病人的血糖浓度是 G_0. 因此，

病人一到医院立即测量他的血糖浓度。从而确定 G_0. 其次，如果在 t_1, t_2, t_3, t_4 四个时刻对病人的血糖浓度再作四次测量，那么，由下面四个方程就可以确定出 A、α、ω_0 及 δ：

$$G_j = G_0 + Ae^{-\alpha t_j}\cos(\omega t_j - \delta), j = 1,2,3,4.$$

第二种确定 G_0、A、ω_0、α 及 δ 的方法更好些。它是在 $t_1, t_2, \cdots, t_n$ 时刻测量出病人的血糖浓度 $G_1, G_2, \cdots, G_n$. 典型地，n 取 6 或 7. 然后求出 G_0, A, α, ω_0 以及 δ 的最佳值，使得平方误差

$$E = \sum_{j=1}^{n}[G_j - G_0 - Ae^{-\alpha t_j}\cos(\omega t_j - \delta)]^2$$

最小。E 的最小化问题可以用数字计算机解决，Ackerman 等人在[1]中还提供了确定 G_0, A, α, ω_0 及 δ 的完整的 Fortran 程序。这种方法比第一种方法更可取。因为(11)只是关于 $G(t)$ 的一个近似公式。从而，可能出现这样的情况，求出的 G_0, A, α, ω_0 及 δ 的值在 t_1, t_2, t_3, t_4 四个点处精确地满足(11)，而在其它时刻拟合甚差。第二种方法通常在整个时间区间内提供了与数据更好的拟合，因为它用到了更多的测量值。

在数字实验中，Ackerman 等人发现，测量 G 时，微小的误差将会导致 α 值产生很大误差。因此，任何含有参数 α 的诊断糖尿病的标准都是不可靠的。不过，系统的自然频率 ω_0 对测量 G 时的实验误差不太敏感。于是，我们可以认为 ω_0 的值是反映 GTT 的基本值。为讨论方便起见，我们使用相应的自然周期 $T_0 = 2\pi/\omega_0$. 值得注意的事实是，来自各方面的数据表明，T_0 值小于 4h 说明情况正常，而明显地大于 4h 则表示有轻微的糖尿病。

注

1. 在我们的文明中，通常两餐之间相隔 4h. 这揭示了一个有趣的可能，即社会的因素在血糖调节系统中也许起了作用。

2. 要强调的是，上面所描述的模型只适用于诊断轻微的糖尿病或发现糖尿病前兆，因为我们始终都假设了 G 与其最佳值 G_0

的偏差 g 很小。G 与 G_0 的偏差很大通常表示严重的糖尿病或尿崩症，这是脑垂体后叶的一种失调。

这种简化模型的一个严重不足是，有时在注入的葡萄糖被吸收后的 3～5h 之间，模型与实际数据不太吻合。当然这表明，像肾上腺素和糖原这样的变量在此期间起了重要作用。因而，这些变量应作为独立变量包含在我们的模型中，不应与胰岛素混在一起。事实上，有证据表明，当葡萄糖降低到禁食时的水平以下时，在 GTT 恢复阶段，肾上腺素水平可能会出现戏剧性的上升。从(9)也可直接看出这一点。如果 $\alpha^2-\omega_0^2>0$，那么 $g(t)$ 就可能会具有图 7.2 所描绘的那种形式。注意到，$g(t)$ 从一个相当高的值迅速地降到一个负值。因此，人体为处理这种非常情况而大量分泌肾上腺素。这种解释是能够令人信服的。

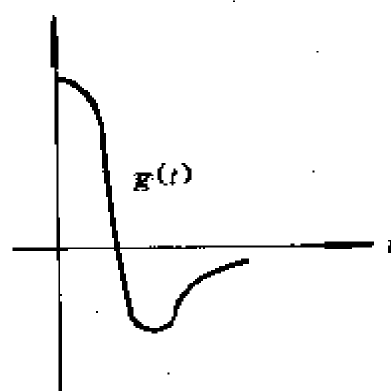


图 7.2　当 $\alpha^2-\omega^2>0$ 时，$g(t)$ 的曲线图

长期以来，医学研究者已经认识到，在任何一个血糖调节系统模型中，有必要把肾上腺素作为独立变量考虑进去。然而，人们对血液中的肾上腺素浓度却不能作可靠的测量，这就阻碍了研究人员的工作。于是，为了实际目的，他们假定，在一次 GTT 过程中，肾上腺素水平保持常数。据悉，罗得岛医院的研究人员已经发明了一种测量血液中肾上腺素浓度的准确方法。这样，我们就能够建立和检验更多的关于血糖调节系统的准确模型。从而有希望得到更客观的诊断糖尿病的标准。

练　习

1. 推导(10).
2. 一位病人经过一整夜的禁食后，到达医院时的血糖浓度为 70mg 葡萄糖/100ml 血液(mg/100ml). 在大量葡萄糖被完全吸收后的 1h，2h 及 3h，他的血糖浓度分别是 95，65，75mg 葡萄糖/100ml 血液。说明这位病人是正常的。(提示：证明 $G-G_0$ 的两个相继零点间的时间间隔为半自然周期。)

   据一位著名的糖尿病学家的经验，刚刚吸收了大量葡萄糖的非糖尿病患者。他的血糖浓度在 2h 或不到 2h 内将处于或低于禁食时的水平。练习 3 和 4 将对这位糖尿病学家的诊断和 Ackerman 等人的诊断进行比较。
3. 一位病人在他刚刚完全吸收了大量葡萄糖时，他的血糖浓度与其最佳浓度的偏差 $g(t)$ 满足微分方程

$$\frac{d^2g}{dt^2} + 2\alpha\frac{dg}{dt} + \alpha^2 g = 0.$$

   其中时间 t 以分钟计，所以 α 的单位是分钟的倒数。试说明，如果用这位著名的糖尿病学家的标准，那么这位病人患有糖尿病。另一方面，观察表明，如果 $\alpha > \pi/120\text{min}$，则根据 Ackerman 等人的结论，这位病人是正常的。
4. 一位病人，在他刚刚吸收了大量葡萄糖后，他的血糖浓度 $G(t)$ 满足初值问题

$$\frac{d_2G}{dt^2} + \frac{1}{20(\text{min})}\cdot\frac{dG}{dt} + \frac{1}{2500(\text{min})}G$$

$$= \frac{1}{2500(\text{min})^2}75mg\ \text{葡萄糖}\ /100\text{ml 血液},$$

$$G(0) = 150\text{mg 葡萄糖}\ /100\text{ml 血液},$$

$$G'(0) = \frac{e^{\sqrt{3}} + e^{-\sqrt{3}}}{e^{\sqrt{3}} - e^{-\sqrt{3}}}G(0)/(\text{min}).$$

   这位病人的最佳血糖浓度是 75mg 葡萄糖/100ml 血液。说明，根据 Ackerman 等人的理论这位病人患有糖尿病，但根据那位著名糖尿病学家所说，这位病人是正常的。
5. 考虑方程 $ag''+bg'+cg=0$，其中 a、b、c 为正的。证明：这个方程的每一个解在 t 趋于无穷时趋于零。

参 考 文 献

[1] E. Ackerman, L. Gatewood, J. Rosevear, and G, Molnar, "Blood glucose regula-

tion and diabetes," in *Concepts and Models of Biomathematics*, F. Heinmets, Ed. Marcel Dekker, 1969, ch. 4, pp. 131-156.

教 师 参 考

目的 关于血液中葡萄糖与激素(包括胰岛素)相互作用的一个模型。提出解释 GTT 结果的一个简单的标准。

预备知识 二阶线性齐次微分方程。

时间 讲授 1～2 课时。

第 8 章

作战模型

Courtency S. Coleman *

人类会厌倦睡觉、厌倦爱情，
会厌倦唱歌、厌倦跳舞，
但对战争却乐此不疲。

——荷马《伊利亚特》

1. 引　　言

第一次世界大战期间，F. W. Lanchester 提出了几个尚不成熟的关于空战战术的尝试性数学模型。(见[9]、[10])从那以后，人们不断推广这些模型，用于描述各种竞争(从孤立的战斗直到整个战争)。我们将概述并"求解"某些简单的模型，评论一场像越南那样的混合型的常规-游击战，并对二次世界大战期间硫黄岛上的战斗作一定深度的研究。

2. 三个 Lanchester 战斗模型

一支 x 部队和一支 y 部队互相交战。设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 分别代表

* Department of Mathematics, Harvey Mudd College, Claremont, CA 91711.

两个部队在 t 时刻的力量，其中 t 从战斗开始时以天计算。将"力量"定量化是不容易的，因为它包括：士兵数量，战斗准备就绪情况，武器性能和数量，指挥员的素质，以及大量心理的和无形的因素。这些因素连描述都很困难，更不用说转化为数量了。我们将采用一种简单的回避方法，即视力量 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为士兵的数量。(另一种战斗力定量化的近似法请参看 Houes 和 Thrall 的著作[8])。

我们将假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 连续地变化，并且为时间的可导函数。当然，这是事态真实状况的一种理想化，因为兵力必须是整数，而且随着时间整数地变化。不过，有人也许会争辩道，当兵力很大时，增加一或二个人，与总体相比简直是一个无穷小，我们进而允许战斗力在很短的时间间隔内作任意小量而不仅是整数的变化。例如，在硫黄岛战役中，如果在战斗的第 18 天美方力量在上午 8:00时为 70 000，上午 9:00 时为 69 995，那么，假定上午 8:05 时，战斗力为 69 999.5833…就是很自然的。一旦将兵力理想化为连续函数，我们也就可以磨光 $x(t)$ 和 $y(t)$ 关于 t 的图像的所有棱角；因此，我们有理由视 $x(t)$ 和 $y(t)$ 为连续、可导函数。

虽然我们可能还没有关于 $x(t)$ 的具体公式(比如作为 t 的一个函数)，但是，我们可以获得大量有关 x 部队的**自然损失率**(OLR)(即由于各种不可避免的疾病、开小差，以及其它非作战事故所引起的损失率)，由于与 y 部队遭遇而产生的**战斗损失率**(CLR)，以及**补充率**(RR)等信息。假定 $x(t)$ 的净变化率由下式给出

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -(\mathrm{OLR} + \mathrm{CLR}) + \mathrm{RR}. \tag{1}$$

y 部队也有一个类似的方程。问题是要求出关于每个部队的这些变化率的适当公式，然后分析相应微分方程的解 $x(t)$ 和 $y(t)$，从而确定谁将"赢得"战斗。

为方便起见，我们列出在下文分析中将要用到的一些符号：

a、b、c、d、h、g	非负损失率常数。
$P(t)$、$Q(t)$	以兵员数量计算的每天的补充率。
$x(t)$，$y(t)$	t 时刻敌对部队双方的战斗力。
x_0，y_0	战斗开始时双方的战斗力。
t	按天计算的战斗时间。

我们将用这些符号写出三个 Lanchester 的作战模型，然后讨论模型的意义。

常规战

$$\text{(CONCOM)}^{*}\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-ax(t)-by(t)+P(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-cx(t)-\mathrm{d}y(t)+Q(t) \end{cases}$$

游击战

$$\text{(GUERCOM)}\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-ax(t)-gx(t)y(t)+P(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{d}y(t)-hx(t)y(t)+Q(t) \end{cases}$$

混合型常规一游击战

$$\text{(VIETNAM)}^{**}\quad \begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=-ax(t)-gx(t)y(t)+P(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=-cx(t)-\mathrm{d}y(t)+Q(t) \end{cases}$$

正如我们将要说明的那样，每一个方程都将一支部队的兵力的变化率与其它变化项目联系起来，并具有(1)的形式。补充率 $P(t)$和 $Q(t)$几乎是不言而喻的。对于一支独立部队，这一项为零。虽然兵员可能被撤离战斗，从而产生负的补充率，但一般地，人们将期望补充率是非负的。**自然损失率**$-ax(t)$和 $-\mathrm{d}y(t)$产生了**不变的相对损失率**(没有战斗和补充时)：

---

* 作者不喜欢首字母缩略词，例如 CONCOM，然而军队正是不正规词语的丰产地，因而在本文中采用它们是再合适不过的了。

** VIETNAM 是越南的英文。——译注。

$$\frac{dx/dt}{x}=-a,\frac{dy/dt}{y}=-d \tag{2}$$

还可能有其它的损失率，不过对大多数情况来说，这就足够了。

如果在 Lanchester 模型中只出现补充率和自然损失率，那么就没有发生战斗，因为任一方对对方都没有影响。将实际战斗引入模型的是**干扰项** $-by(t)$，$-cx(t)$，$-gx(t)y(t)$，以及 $-hx(t)y(t)$. 现在，有一支常规部队在野外（相对而言）作战，Lanchester 假设这支部队的每一个成员都在敌人的有效杀伤距离之内。还假设，一旦这支常规部队受到损失，炮火就集中到剩下的兵员身上。在这些条件下，Lanchester 提出，一支常规的 x 部队的战斗损失率具有形式 $-by(t)$，其中 b 是 y 部队的**战斗效果系数**。注意到，y 部队中每单个兵员所造成的 x 部队的战斗损失率为

$$\frac{dx/dt}{y}=-b \tag{3}$$

这样，b 就是 y 部队中每个成员在战斗中的平均效果的一个度量。关于 $-cx(t)$ 项可以给出一个类似的解释。

计算战斗效果系数 b 和 c 并不是一件简单的事。一种方法就是令

$$b=r_yp_y,c=r_xp_x, \tag{4}$$

其中 r_y 和 r_x 分别表示 y 部队的 x 部队的射速（射击次数/兵员/D），p_y 和 p_x 分别表示一次射击杀死一个敌人的可能性。由(4)可以看出，y 部队决定着 b，x 部队决定着 c. 有时一个**事后的战斗分析**将揭示 b 和 c 的值（参看第 6 节中硫黄岛模型）。

常规部队的这些损失率都是线性的；而根据 Lanchester 的研究，游击部队的战斗损失率是非线性的。其论据如下：设 $x(t)$ 表示一支敌人看不见且有一块固定占领区 R 的游击队。敌人向 R 内射击但无法知道什么时候产生伤亡。有理由认为。游击队的战斗损失率应与 R 内自己人员的数量 $x(t)$ 成比例；且 $x(t)$ 越大，被敌人

杀死的概率就越大。另外，游击队 x 的战斗损失率还与敌人的战斗力 $y(t)$ 成比例。这样，我们得出游击队的战斗损失率为

$$-gx(t)y(t).$$

估计游击队 x 的敌手 y 的**战斗效果系数** g. 要比估计由(4)给出的系数 b 复杂些。我们仍可以利用 r_y，但 p_y 不再是由 y 部队完全确定的了。Lanchester 认为杀伤游击队 x 的一个成员的概率与 y 的一次射击的**有效面积** A_{ry} 成正比，而与游击队占领区的面积 A_x 成反比。A_{ry} 为单个游击队员在掩蔽体中其身体暴露部分的面积。这样，关于 g 和 h 的比较合理的公式就是：

$$g = r_y \frac{A_{ry}}{A_x}, \text{和 } h = r_x \frac{A_{rx}}{A_y}. \tag{5}$$

这里，关键的差别在于游击队在某种程度上能控制自己的战斗损失常数，而常规部队则不能：看来游击部队在战斗期间将尽可能地去占领广阔的领地，当然，随之而来的问题就是部队过于分散。

CONCOM，GUERCOM 及 VIETNAM 这三个模型是建立在 Lanchester 的这些补充和损失率的各种组合基础之上的。现在读者应回过头来考察这些模型了，看看各个项之间是如何相适应的，并验证所给的题目(练习 1)。注意，对于在越南进行的那场持续了四分之一世纪的战争，用模型“VIETNAM”来描述是不够精确的，因为各个部队在不同的时间所用的是不同的战斗模型。不管怎样，下面我们将会看到，在某种程度上这个术语和模型有其重要意义。

要验证这些模型的有效性，需要来自各场战斗的有关数据。不过。我们还是先来“求解”CONCOM，GUERCOM 和 VIETNAM 的简化(实际上是超简化)形式。

3. 常规战斗：平方律

假设两支孤立的常规部队正在交战，所作的理想假设是自然

损失为零。在双方没有增援和自然损失的情况下，CONCOM 简化为简单的线性方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -by, \tag{6a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cx. \tag{6b}$$

用(6a)除以(6b)，我们得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{cx}{by}. \tag{7}$$

在(7)中分离变量并积分，得

$$b\int_{y_0}^{y(t)} y\mathrm{d}y = c\int_{x_0}^{x(t)} x\mathrm{d}x,$$

$$b(y^2(t) - y_0^2) = c(x^2(t) - x_0^2). \tag{8}$$

相互对抗的部队之间的这种二次关系，说明了人们给线性方程组(6)冠以**平方律模型**这个独特名称的原因。

设 K 表示常数 $by_0^2 - cx_0^2$. 由(8)得到的关于方程

$$by^2 - cx^2 = K \tag{9}$$

的图形是一支双曲线(若 $K=0$ 则为一对直线)，我们称(9)为**双曲律**。图 8.1 绘出了对应于不同 K 值的双曲线。显然，我们只需考察**兵力象限**($x \geqslant 0, y \geqslant 0$)中的曲线。曲线上的箭头表示兵力随时间而变的方向。因为，只要 $x(t) > 0, y(t) > 0$，就有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t < 0$ 和 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t < 0$，所以箭头的方向如图 8.1 所示。

在这样的战斗中谁将"获胜"?如果一支部队先被消灭，我们就说另一支部队将获胜。例如，如果 $K > 0$，则 y 获胜，因为根据(9)，y 在这种情况下决不会被消灭，但对 x 部队来说，当 y 减少到 $\sqrt{K/b}$ 时它就将被歼灭。这样，y 部队试图形成一个 $K > 0$ 的战斗态势，即 y 部队希望下述不等式成立

$$by_0^2 > cx_0^2. \tag{10}$$

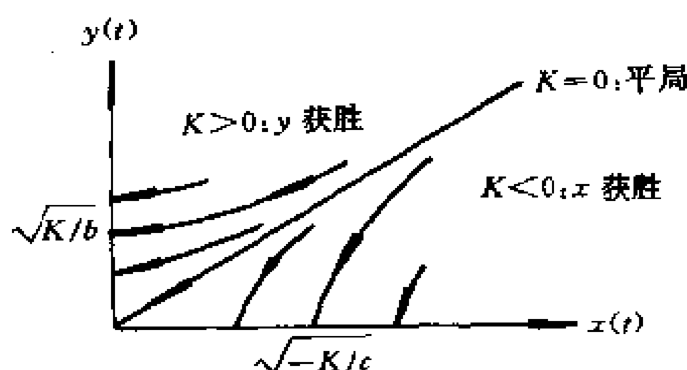


图 8.1　平方律的双曲线

由(4)看出，(10)可写成

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2 > \left(\frac{r_x}{r_y}\right)\left(\frac{p_x}{p_y}\right), \tag{11}$$

这就是 y 部队在数量上占优势的条件。假设两支部队都训练有素，并且处于良好的作战条件，那么，很难看出作战双方对(11)的右边会有多大影响。(11)左边的平方说明，**初始兵力比例** y_0/x_0 的变化被平方地放大了。显然，y 部队的目标是增大兵力比例，而其对手是要减小这个比例。但(11)中平方的作用却不明显。

正是这个作用使得达到一个有利的局部力量对比成为如此重要。例如，从 $y_0/x_0=1$ 到 $y_0/x_0=2$ 的一个变化，将使 y 部队获得四倍的优势。当然，(11)是一个有利于 y 部队的不等式条件。x 部队则将试图通过增加 x_0 使不等式倒向。

方程(9)只与两会部队各自的兵力有关，而与时间的推移无关。通过下述方法，由(6)可得到关于兵力的瞬时变化公式。对(6a)微分并利用(6b)得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -b\frac{dy}{dt} = bcx,$$

或

$$\frac{d^2x}{dt^2} - bcx = 0. \tag{12}$$

利用初始条件

$$x_0 = x(0); \quad -by_0 = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t|_{t=0},$$

则二阶常系数齐次线性常微分方程(12)的解由

$$x(t) = x_0\cosh(\beta t) - \gamma y_0\sinh(\beta t) \tag{13}$$

给出，其中 $\beta=\sqrt{bc}$，$\gamma=\sqrt{b/c}$，类似的，

$$y(t) = y_0\cosh(\beta t) - \frac{x_0}{\gamma}\sinh(\beta t). \tag{14}$$

图 8.2 示出了在 $K>0$（即 $by_0^2>cx_0^2$ 或等价地，$\gamma y_0>x_0$）的特殊情况下，(13)和(14)的图形。可以看出，y 部队要取胜并不一定要求 y_0 超过 x_0，但必须使 $\gamma y_0>x_0$.

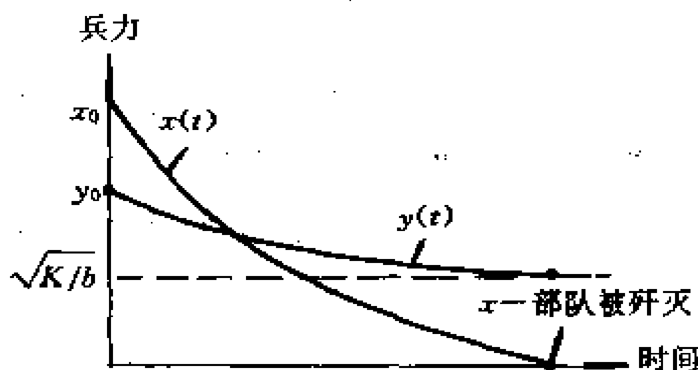


图 8.2　$K>0$ 时，兵力与时间的关系，这里仅绘出了两个部队都存在的那段时间上的曲线

4.　游击战：线性律

同上，如果两支游击队在作战中均无自然损失和增援，那么模拟它们作战情况的动态方程就比较容易求解。在这些严格条件下，GUERCOM 简化为非线性动态系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -gxy, \tag{15a}$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -hxy. \tag{15b}$$

用(15a)除以(15b)，得到一个简单方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{h}{g},$$

对其积分，得

线性律 $$g(y(t)-y_0)=h(x(t)-x_0). \tag{16}$$

(16)的线性形式说明，为什么非线性方程组(15)通常称为**线性作战规律**。重写(16)，有

$$gy-hx=L, \tag{17}$$

其中 $L=gh_0-hx_0$. 如果 $L>0$，那么 y 部队将获胜；如果 $L<0$，则 y 部队将被击败，如前所述，如果 y 部队仍剩有一些能作战的兵员，那么 y 部队将获胜，而 x 部队被歼灭。关于(17)的线性图形请看图 8.3.

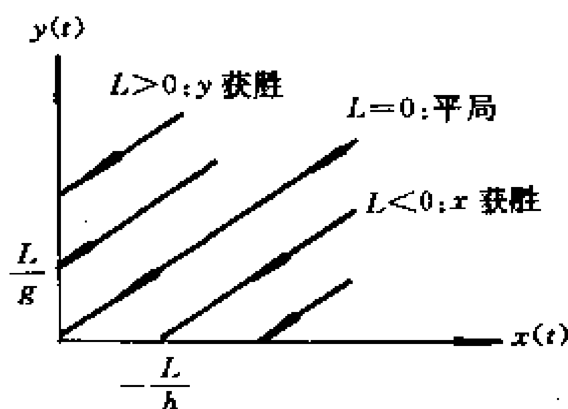


图 8.3 线性律

求解与时间相关的兵力公式并不困难，我们把这个工作留给读者去完成(参看练习 2)。现在如果 $L>0$，即如果

$$\frac{y_0}{x_0}>\frac{h}{g}, \tag{18}$$

那么 y 将获胜。回忆一下(5)式给出的在这种游击战情况下计算 g 和 h 的方法，y 获胜的条件为

$$\frac{y_0}{x_0}>\frac{r_x}{r_y}\cdot\frac{A_{rx}}{A_{ry}}\cdot\frac{A_x}{A_y}. \tag{19}$$

对于 y 部队，预先的作战战略包括努力使战斗力比例 y_0/x_0 达最大并使相应的面积比例数 A_x/A_y 达最小。也许双方对比例 r_x/r_y 和 A_{rx}/A_{ry} 都不可能产生什么影响。我们注意到，(19)的左边是线性的，这样，比例 y_0/x_0 的变化没有被平方放大，而在 CONCOM 中，相应的项被平方了(参见(11))。另外，(19)中还有另一个可以变化的项 A_x/A_y，但在 CONCOM 模型中则不存在这样的项。把(19)写成下面的形式

$$\frac{A_y y_0}{A_x x_0} > \frac{r_x}{r_y} \cdot \frac{A_{rx}}{A_{ry}}. \tag{20}$$

于是。我们看到 $A_y y_0$ 和 $A_x x_0$ 是关键的项。对这个模型我们不再多讨论了，因为没有哪场重大的现代战争是完全采用这种作战形式的。

5. 越南：抛物律

在 VIETNAM 中，一支游击部队与一支常规部队交战。我们还是作某些简化，假设无增援也没有自然损失。在这种情况下，VIETNAM 简化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -gxy, \tag{21a}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -cx, \tag{21b}$$

其中 x 表示游击队，y 表示常规部队。用(21a)除以(21b)，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{c}{gy}, \tag{22}$$

对其积分，得

抛物律 $$gy^2(t) = 2cx(t) + M, \tag{23}$$

其中 $M = gy_0^2 - 2cx_0$. 如果 $M<0$，那么游击队获胜，而 $M>0$ 时，常规部队 y 获胜。图 8.4 绘出了(23)定义的抛物线。

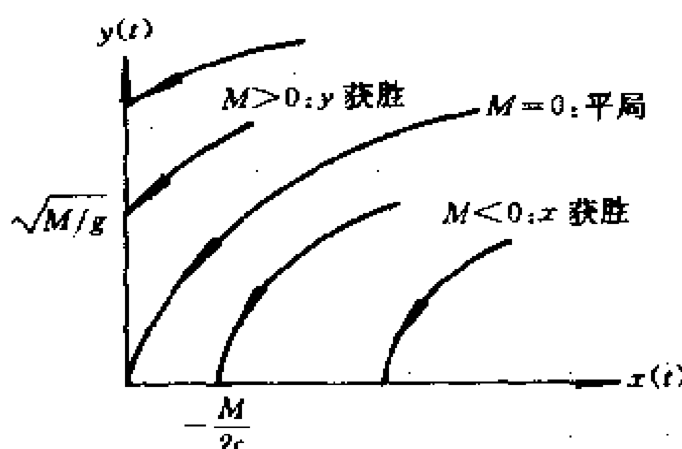


图 8.4 抛物律

经验表明，只有兵力比例 y_0/x_0 远远大于 1 时，常规部队 y 才能战胜游击队 x. 那么，要确保常规部队 y 获胜，从(23)所给的抛物律中，我们可以得到关于比例 y_0/x_0 的一些什么信息呢？回忆一下，如果 $M>0$，即如果有

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{2c}{g}\cdot\frac{1}{x_0}=2\,\frac{r_x}{r_y}\cdot\frac{A_x p_x}{A_{ry}}\cdot\frac{1}{x_0},\tag{24}$$

y 就会取得胜利，其中 c 和 g 的值是根据射速、杀伤区域以及游击队占领区的面积，利用(4)和(5)进行计算的。假设射速 r_x 和 r_y 近似相等，则 $r_x/r_y\approx1$. 另外，假设一名游击队员射击一次杀死一名对手的概率 $p_x=0.1$，并且，在掩蔽体下，单个游击队员身体易攻击的部分为 $2ft^2(A_{ry}=2)$. 这样，(24)便化为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>0.1\,\frac{A_x}{x_0}.\tag{25}$$

通常，游击队是以相对比较小的单位进行作战，故设 $x_0=100$，并且我们给每个游击队员赋予 $1\ 000ft^2$，从而 $A_x=100\times1\ 000=100\ 000$. 在这些假定下，(25)化为

$$\left(\frac{y_0}{x_0}\right)^2>\frac{0.1\times100\ 000}{100}=100,$$

或

$$\frac{y_0}{x_0} > 10. \tag{26}$$

这样，简化了的 VIETNAM 的模型指出，如果游击队是在能将其隐蔽起来的相对较大的范围内以较小的单位进行作战，那么，常规部队与游击队的兵力比必须相当大。当然，重要的是局部比例(尽管我们可以假定它也反映了总体的比例)。

然而，在南越西部进行的战争实际上并不服从这一简化的模型。有时，越共和北越是以常规的方式进行战斗(如 1968 年 2 月间的新年攻势)，而美国和南越军队偶尔也采用游击战。不过，双方都看出整个战争是以一种混合型的常规-游击战模式进行的，至少定性看来是如此。

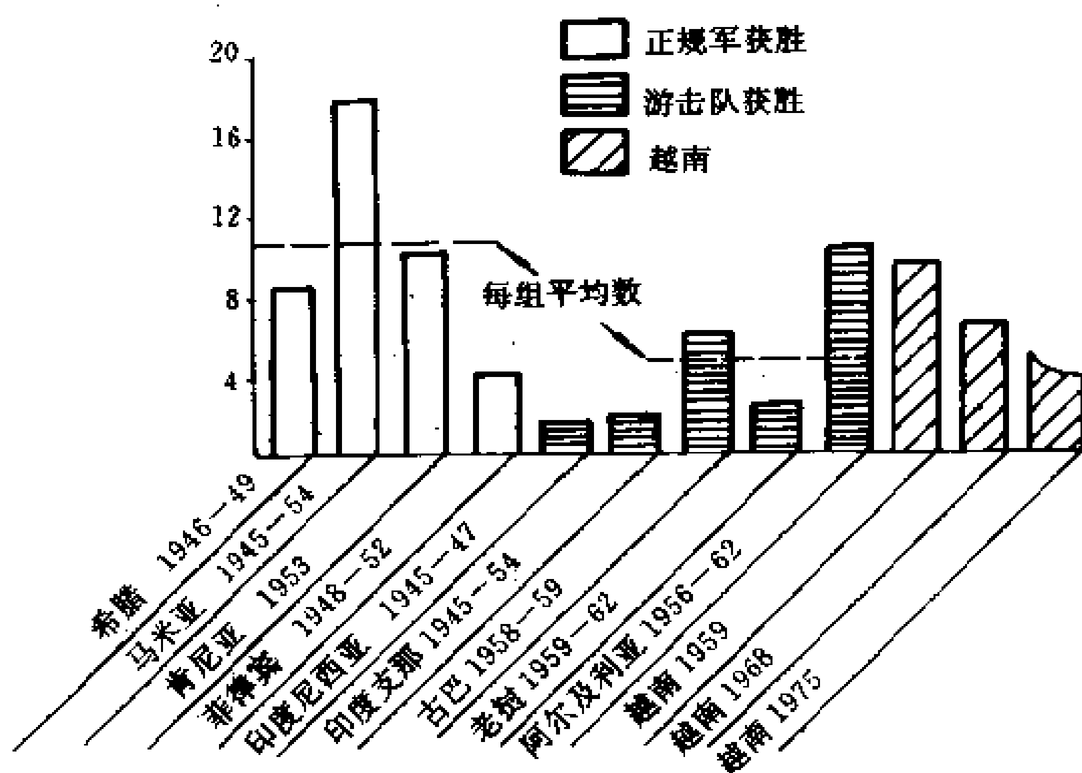


图 8.5 混合的游击-常规战

根据(26)，常规的南越和美国部队要取得胜利必须有十倍于

越共和北越的兵力。实际的比例是多少？Deithman 于 1962 年(见[2])列出了二次世界大战之后的 10 次混合型常规-游击战的平均兵力比，其中包括了截至当时为止的有关越南南部战斗的数字(见图 8.5)*。

由图 8.5 可以看出，在这样的战斗中，只有当整个力量对比至少是 8 比 1 时，即

$$\frac{\text{常规部队}}{\text{游击部队}} > 8 \tag{27}$$

局势才会有利于常规部队。显然，这些数据加强了我们的断言，即近似地(26)是正确的。当然，图 8.5 还是稍有误差的，因为没有算入在整个战斗期间的兵员补充率或自然损失率，而仅考虑了此间所使用的实际兵力的平均值。

从图 8.5 可看出，到 1968 年，常规部队与游击队的比例下降到(6:1)，假定关于越南战争的抛物律以及上面所用的数字有效，那么，游击队有希望取胜，即使美国派出大规模的援军，这种败局也会出现。事实上，新年攻势(在新年攻势中，越共和北越赢得了某些局部的胜利，不过战斗几乎完全采用常规方式)刚过，Westmoreland 将军就向约翰逊总统要求增派一支 206 000 人的部队。这些人员会起作用吗？如同下面这张部队战斗力表所表明的那样，回答是“没有多少用”(我们再次假设战争是混合型常规-游击战的继续)。

---

* 最后加了两列，1968 年的数据摘自《大不列颠百科全书》第 15 版，1974 年，第 19 卷，第 130 页。

1968 年春，在越南南部的各部队

常规部队		游击部队	
美国	510 000	北越 *	50 000
南越：		越共：	230 000
正规军	600 000		
南越：			
地方保安 *	500 000		
其它同盟：	70 000		
总计	1 580 000	总计	280 000

兵力比率：$\frac{1\ 680\ 000}{280\ 000}=6$

如果约翰逊总统根据要求派出 206 000 人的部队，那么，力量对比将增加到

$$\frac{1\ 886\ 000}{280\ 000} \sim 6.7$$

这仍不足以使常规部队的状况有较大的改变。而且游击队也将会增加到 314000，从而保持 6:1 的比例。正是基于这样的分析，以及美国人民对整个事态的焦虑，约翰逊总统才不得不从政治上寻求一种解决越南战争的办法。他拒绝了 Westmoreland 的要求，发起了巴黎和平会谈。这些会谈最终导致了美国于 1973 年撤离战斗。1975 年 4 月越共和北越取得了最后的胜利。（我们要再次强调，我们已经忽略了许多重要的因素，如北越的轰炸和恐怖分子活动的影响等。）

---

* 近似估计。

6. 硫黄岛战斗

我的身体不会从战场上消失，
除非我们的仇已报；
我将再生七次，
为的是参军打敌人。*

硫黄岛位于东京以南660mi，是一座火山岛，面积仅8mi². 二次大战中，最残酷的一场战斗就是在这个岛上进行的，交战国是日本和美国。这个岛实际上属于东京专区，已被认为是日本的一部分。日本之所以决定坚守这个岛，一部分原因是由于上述缘故，但主要的是因为它的重要性，它作为一个基地，可以组织攻击前去轰炸东京和日本其它城市的美国飞机。相反，美国则需要它作为紧靠日本诸岛的轰炸机基地，在一场大规模的轰炸准备之后，美国人于1945年2月19日开始袭击。事后发现，这场最初的轰炸对日军的战斗力并没有多大影响，因为日军部队都隐蔽在天然的或人造的地洞内。2月19日的战斗是紧张的(实际上长达一个月之久的整个战斗始终如此)，双方伤亡惨重。日军要求不惜一切代价守住这个岛，只要还有一个人，就要战斗下去，他们确实这样做了。3月16日，美军宣布这个岛为"安全区"。3月26日战斗结束，5月中旬对躲藏在地洞里的日本战斗人员的清扫工作基本结束。(最后两个日本人投降是在1951年!)

这场血腥的战斗现在差不多已被人们遗忘了，只是在新闻期刊或有关战争的图片收藏中还不时地会重印出栗林的这句话，或登出四个美国海军陆战队士兵在硫黄岛的Mt. Suribachi升起美国

---

* 这些诗句是硫黄岛日军司令栗林在他和他的残部在血腥战斗中被杀死前不久所申言的。

国旗的照片等。以后还会再出现短暂的对硫黄岛的兴趣。但是总的来说，战斗仅仅留存在参战将士的家属的记忆以及军史中。

J. H. Engle 利用实际的战斗记载构造出一个关于那场战斗的 Lanchester 模型，我们将循着他的分析，使用他的数据继续下去。在战斗期间，美军得到了支援，而日军没有。因此，至少美军的作战损失是微不足道的，至少是可以忽略的。有人或许争辩道：将隐藏在地洞内的日军看作游击部队，那么 VIETNAM 模型将适用于硫黄岛战斗。不过 Engel 证明也可以用 CONCOM 模型

$$(a)\ \frac{dx}{dt} = -by + P(t),$$

$$(b)\ \frac{dy}{dt} = -cx,$$

其中 x 和 y 分别表示美、日两军的战斗力。为了使变量有直接的联系，分别用 A 和 J 替代 x 和 y

$$\frac{dA}{dt} = -bJ + P(t), \tag{28a}$$

$$\frac{dJ}{dt} = -cA. \tag{28b}$$

用方程组的参数变值法或者是下面的方法，我们可以求出(28)的解。对(28b)求微分，然后利用(28a)，得

$$\frac{d^2J}{dt^2} = -c\frac{dA}{dt} = bcJ - cP(t).$$

或

$$\frac{d^2J}{dt^2} - bcJ = -cP(t), \tag{29}$$

方程(29)是一个带有“驱动力”$-cP(t)$的二阶线性常系数常微分方程。单个二阶方程的参数变值法技术使我们能够解出(29)，得(参见(13))

$$J(t) = J_0\cosh(\beta t) - \frac{A_0}{\gamma}\sinh(\beta t) - \frac{1}{\gamma}\int_0^t \sinh\beta(t-s)P(s)ds, \tag{30}$$

其中 J_0 和 A_0 分别为袭击前岛上日军和美军的兵力(因此 $A_0=0$), $\beta=\sqrt{bc}$, $\gamma=\sqrt{b/c}$. A_0 出现于(30)是因为根据(28b), $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t|_{t=0}=-cA_0$.

将(30)对 $\mathrm{d}J/\mathrm{d}t$ 积分,然后利用(28b),我们就可以确定$A(t)$。由(30)有

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\beta J_0\sinh(\beta t)-\frac{\beta}{\gamma}A_0\cosh(\beta t)-\left(\frac{1}{\gamma}\right)\sinh\beta(t-s)P(t)$$
$$-\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)\int_0^t\cosh\beta(t-s)P(s)\mathrm{d}s, \qquad (31)$$

其中我们利用了对积分式求微分的莱布尼兹法则

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_0^t \mathrm{h}(t,s)\mathrm{d}s=\mathrm{h}(t,t)+\int_0^t\frac{\partial}{\mathrm{d}t}\mathrm{h}(t,s)\mathrm{d}s.$$

因 $\sinh 0=0$ 及 $\beta/\gamma=c$,(31)变为

$$\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}=\beta J_0\sinh(\beta t)-cA_0\cosh(\beta t)-c\int_0^t\cosh\beta(t-s)P(s)\mathrm{d}s. \qquad (32)$$

回忆一下 $A_0=0$ 并利用(28b)中 $A(t)=-(1/c)(\mathrm{d}J/\mathrm{d}t)$,我们有

$$A(t)=-\gamma J_0\sinh(\beta t)+\int_0^t\cosh\beta(t-s)P(s)\mathrm{d}s, \qquad (33)$$

样,由美日两军兵力随时间变化的 Lanchestrian 模型得出

$$A(t)=-\gamma J_0\sinh(\beta t)+\int_0^t\cosh\beta(t-s)P(s)\mathrm{d}s, \qquad (34a)$$

$$J(t)=J_0\cosh(\beta t)-(1/\gamma)\int_0^t\sinh\beta(t-s)P(s)\mathrm{d}s, \qquad (34b)$$

当然,这些方程正是 $A_0=0$ 时的(30)和(33)。

将这些理论模型与实际数据进行比较,我们当即遇到了麻烦:没有日军方面的记载!显然,栗林将军所掌握的伤亡数表在战斗中被毁掉了,而保存在东京的任何记载在最后五个月的战争中也被燃烧弹烧毁了,不管怎样,日军最初的人数是惊人的。在整个战斗中没有一个日本人从岛上逃去,没有一艘日本船只和飞机在岛上

登陆或离去；每个日军士兵或被打死或被俘虏。这样尸体数和囚犯数就为我们提供了有关日军的数据。美军每天都对自己的伤亡人数作记录(参见[11])；下表只是给出了全部总数。

硫黄岛上的伤亡人数

美国在硫黄岛上的伤亡总数

	被击毙，失踪或受伤而死	受伤	战斗疲劳症	总计
海军陆战队士兵	5 913	17 272	2648	25 851
海军部队：				
舰艇及空军分队	633	1 158		1 791
卫生员	195	529		724
修建营	51	218		269
医生和牙医	2	12		14
战斗中的陆军部队	9	28		37
全部总计	6 821	19 217	2 648	28 686

日本在硫黄岛上的伤亡人数

防御部队	俘虏		被击毙
(估计)			
21 000	海军陆战队士兵	216	20 000
	陆军	867	
	总计	1 083	

Newcomb 关于日军的数字 21 000 较实际稍低了点，很明显，他没有将最后几天在地洞中找到的某些活的和死的日军算进去。我们将采用 Engel 的 21 500 这个数字。这样，在(34)中令 $J_0=21\ 500$.

美国的增援率 $P(t)$ 为

$$P(t)=\begin{cases}54\ 000, & 0\leqslant t<1\\ 0, & 1\leqslant t<2\\ 6\ 000, & 2\leqslant t<3\\ 0, & 3\leqslant t<5\\ 13\ 000, & 5\leqslant t<6\\ 0, & 6\leqslant t<36\end{cases}$$

其中我们假定每天的增援率是不变的，且以每天登陆的部队数量来度量。

现在，就剩下 β 和 γ（即对 b 和 c）是待定的了。这里我们不得不粗糙一些。首先，b 和 c 不能仅仅是现役战斗员而应是整个部队的平均效率系数。这里说的整个部队包括参战者与支援者，因为我们已将所有这些部队都加在一起了。第二，对于一场持续了这么多天的战斗，即使是这样的系数的平均我们也无法算出，我们将不再循着 Engel 的方法（参见[3]），而要问是否可以利用美军的日伤亡人数表[11]、(35)中的增援数据以及 $J_0=21\ 500$ 来确定 b 和 c 的可能值。由 Morehouse 给出的伤亡人数表和(35)，可算出 $t=1,2,\cdots,36$ 时的 $A_{act}(t)$（美军的实际人数）。然后对(28b)积分，得

$$J(36)-J_0=-c\int_0^{36}A_{act}(t)\mathrm{d}t$$
$$=-c\sum_{t=1}^{36}A_{act}(t)\ ,$$

由此得

$$c=\frac{J_0-J(36)}{\sum\limits_{t=1}^{36}A_{act}(t)}=\frac{21\ 5000-0}{2\ 037\ 000}\sim 0.0106 \qquad (36)$$

其中分母是 Engel 根据 Morchouse 所给的数据算出的。

现在我们需要对 b 进行估计。利用(36)中给出的 c 值，我们可求出实际值 $J_{act}(t)$ 的一个近似值 $J_{app}(t)$. 当然，这个实际值只对 $t=0$ 和 $t=36$ 是已知的：

$$J_{app}(t)=21\ 500-0.0106\sum_{k=1}^{t}A_{act}(k),t=0,1,\cdots,36, \qquad (37)$$

这里，我们对(28b)求了从 0 到 t 的积分，然后用(37)中的求和代换了 $\int_0^t A_{act}(s)\mathrm{d}s$. 前面已经说过，实际战斗在第 36 天结束，但是从第 28 天到第 36 天交战只是零零星星地进行，看来用这个连续模

型似乎有些不可靠。因此，为求出 b，我们将令 $t=28$.（对 c 的计算我们只能选择 $t=36$，因为只有当整个战斗结束时，我们才能获得准确的日本军队损失数数字。）对(28a)积分得

$$A(t) = A_0 - b\int_0^t J_{app}(s)\mathrm{d}s + \int_0^t P(s)\mathrm{d}s$$

$$= - b\sum_{k=1}^{t} J_{app}(k) + \sum_{k=1}^{t} P(k). \tag{38}$$

这样，利用(38)和 $t=28$ 求出 b：

$$b = \frac{\sum_{k=1}^{28} P(k) - A(28)}{\sum_{k=1}^{28} J_{app}(k)}. \tag{39}$$

为了求出(39)右边的各个量，我们将利用下面的数字：

$\sum_{k=1}^{28} P(k)=73\ 000$，根据(35)；

$A(28)=52\ 735$，Engel 从 Morehouse 的数据中取出；

$\sum_{k=1}^{28} J_{app}(k)=372\ 500$，Engel 利用(37)和 Morehouse 关于 $A_{act}(t)$ 的数据算出。

我们有

$$b \sim 0.0544. \tag{40}$$

应再次指出的是，b 是利用(38)（取 $t=28$）和实际的美军日兵力算出的（如同 Engel 计算 $\sum_{k=1}^{28} A_{app}(t)$ 那样）。（也可以采用另一种方法，对于每一个 $k=1,\cdots,28$，由(38)算出 $b(k)$，然后取平均值，不过我们没有这样做）。现在，我们要问，对于 $k=0,1,\cdots$，应如何比较 $A_{act}(k)$ 和由(38)算出的 $A(k)$. Engel 把这两组数值绘在同一张图上，而图 8.6 中还包含了修改后的图形。考察战斗开始阶段由于增援部队而引起的向上的阶跃。虽然计算 b 和 c 的方法并不令人惊讶，但两组值却吻合得非常好。这样看来。Lanchestrian 模型

确实适合硫黄岛战斗。当然其它模型可能同样好或更好。

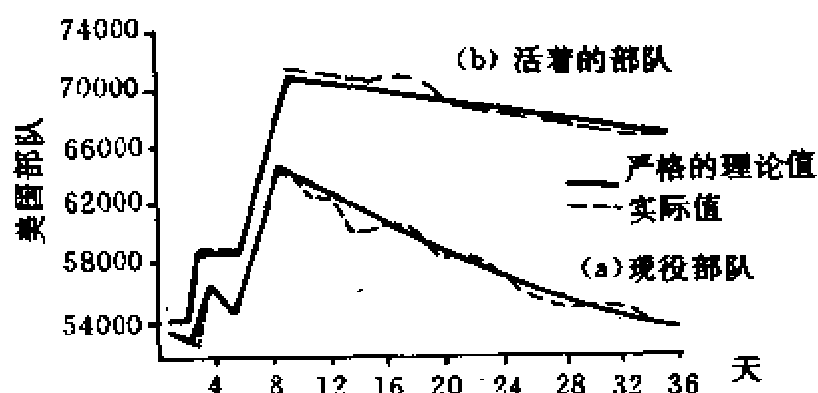


图 8.6 关于硫黄岛战斗的实际兵力与理论兵力的比较(取自 Engel 的[3])

7. 战斗的数学模型:建模的阴暗面

这些模型都存在着由于运用数学带来的道德问题。20 世纪上半叶,最著名的英国"纯"数学家 G. H. Hardy 曾这样说过(见[5]):

> 所以,一位真正的数学家要问心无愧;不做任何有损他的工作价值的事;数学是……一项"无害和清白的"职业。另一方面,平凡的数学在战争中却有很多应用。

对 Hardy 来说,纯数学是深奥的,"真正的"、"无害且清白的",而能够应用的是"平凡的"数学。人们不禁要问,事情就这么简单吗?

数学世界并不是一个完全脱离民族、文化以及创造发明它的数学家们的。因为战争以及为战争作准备依然是人类主要关注的事情,所以,对用数学来研究和分析战争就不必感到惊讶了。数学主要地被用于武器的设计—— 即阿基米德与他的弹弓或当代关于导弹弹道的计算。不过,数学的分析也可用于制定最优决策、后勤和战术。Lanchester 的奇妙的模型就属于后面那种数学在军事中的应用。[13]中给出了一个有趣的数学模型,它描述的是一场军备竞赛的荒唐行动。

关于数学在战争研究中的应用，作者有自己的道德标准，显然，读者也一样。不管这些标准怎样，每个人都必须知道数学将继续被用于这个残忍的领域。

练　　习

1. 解释CONCOM，GUERCOM以及VIETNAM中的每一项。在VIETNAM中，哪一方是游击队，x还是y？
2. 求(15)在人数象限$x>0$，$y>0$内的所有解$x(t)$和$y(t)$.
   提示：解(17)，由x求出y，将y的这个表示式代入(15a)，然后对(15a)分离变量，利用部分分式(或积分表)求解。最后将x表示为t的函数，对(15b)亦可作类似的处理。
3. 对(29)运用参数变值法，并化简(30)。
4. 由(32)推导(33)。
5. 在简化的常规战规律(6)中令$x_0=15\ 000$，$y_0=20\ 000$，$b=0.04$，$c=0.5$，假定y部队有5 000可用作增援的部队，但这些部队必须是在需要的时刻突然地全部投入战斗。对增援出现的最佳点给出一个全面的分析。(这里答案不必是单一的；你必须定义你所指的"最佳"。利用(9)并令K最初为20 000，然后，一旦增援出现后再利用(9)，而新的K值由此时的$y(t)$所确定。)
6. 重做5，不过所遵循的是线性规律。利用(15)和(17)并取$x_0=15\ 000$，$y_0=20\ 000$，$g=0.04$，$h=0.05$，y的增援为5 000.
7. 对(28)直接运用方程组的参数变值法来获得(34)。

方　　案

阿登高原战斗(或比法战斗)是二次大战期间德国国防军最后一场大规模进攻。战斗于1944年12月6日开始，德国首先发起惊人的攻击，头6天中，战线突入盟军防线达70mi宽，50mi深。到1945年1月28日，战线退回到原来的形状，整个战斗结束。下表概述了战斗统计数据，其中每天非战斗伤亡数字主要是推测出来的。没有关于德国每天战斗伤亡的数字，这与日本在硫黄岛的情况一样。建立关于这场战斗的模型并解之。Harvey Mucle学院的一个学生小组搜集了表中的数据，构造了他们自己设计的一个模型，并求出了它的解，见(7)。他们的方程是

$$\frac{dA}{dt} = -C_A(t) - bG(t) + R_A(t),$$

$$\frac{dG}{dt} = -C_G(t) - cA(t) + R_G(t),$$

其中他们假定非战斗伤亡率[$-C_A(t)$和$-C_G(t)$]独立于各部队的规模。你或许愿意构造另一种模型。建议：把冲突的头 10 天看作一场战斗，而剩下的 34 天作为另一场战斗。)

有关这个方案的参考书(除[7]以外)：

H. M. Cole, *The Ardennes: Battle of the Bulge — The European Theater of Operations*, Office of the Chief of Military History Department of the Army, Washington, DC, 1965.

J. S. D. Eisenhower, *The Bitter Woods*. New York: Putnam, 1969.

Encyclopedia Americana, vol. 29. *New York*: *Americana*, 1971, pp. 410—413.

Report of Operations (*Final Aftion Action Report*), 12th Army Group, vol. I—XII.

关于美军和德军的日统计表

天数	日期	美军 增援部队	战斗伤亡	非战斗伤亡	战斗力	德军 增援部队	非战斗伤亡
0	十二月16	0	0	0	92 200	0	0
1	17	0	2 500	1 000	88 700	0	1 000
2	18	0	6 000	1 000	81 700	24 400	1 000
3	19	33 100	3 750	1 000	110 050	0	1 000
4	20	13 200	3 800	1 000	118 450	14 400	1 000
5		48 800	2 750	1 009	163 500	0	1 000
6	21	26 100	1 625	1 000	186 975	0	1 000
7	22	26 700	3 500	1 000	209 175	14 400	1 000
8	23	24 400	1 875	1 000	230 700	0	1 000
9	24	12 900	2 575	1 000	240 025	0	1 000
10	25	13 000	2 000	1 000	250 025	34 000	1 000
11	26	0	2 000	1 000	247 025	0	1 000
12	27	12 200	1 875	1 000	256 350	0	1 000
13	28	0	1 250	1 000	254 100	0	1 000
14	29	0	1 250	1 000	251 850	0	1 000
15	30	23 300	1 000	1 000	273 150	20 000	1 000
16	31	10 300	1 500	1 000	280 950	0	1 000
17	一月 1	0	1 125	1 000	278 825	48 000	1 000
18	2	0	875	1 000	276 950	10 000	1 000
19	3	8 500	1 500	1 000	282 950	0	1 000
20	4	0	1 500	1 000	280 045	0	1 000

天数	日期	美军 增援部队	战斗伤亡	非战斗伤亡	战斗力	德军 增援部队	非战斗伤亡
21	5	0	1 250	1 000	278 200	0	1 000
22	6	0	875	1 000	276 325	0	1 000
23	7	0	1 375	1 000	273 950	0	1 000
24	8	0	1 000	1 000	271 950	0	1 000
25	9	12 900	1 250	1 000	282 600	0	1 000
26	10	0	1 375	1 000	280 225	0	1 000
27	11	0	1 000	1 000	278 225	0	1 000
28	12	0	1 000	1 000	276 225	0	1 000
29	13	0	1 500	1 000	273 735	0	1 000
30	14	0	1 500	1 000	271 225	0	1 000
31	15	0	2 000	1 000	268 225	0	1 000
32	16	0	1 625	1 000	265 600	0	1 000
33	17	0	1 000	1 000	263 600	0	1 000
34	18	0	1 250	1 000	261 350	0	1 000
35	19	0	1 125	1 000	259 225	0	1 000
36	20	0	875	1 000	257 350	0	1 000
37	21	0	1 125	1 000	255 225	0	1 000
38	22	0	875	1 000	253 350	0	1 000
39	23	0	875	1 000	251 475	0	1 000
40	24	0	1 000	1 000	249 475	0	1 000
41	25	0	875	1 000	247 600	0	1 000
42	26	0	750	1 000	245 850	0	1 000
43	27	0	875	1 000	243 975	0	1 000
44	28	0	500	1 000	242 475	0	1 000
		265 400				164 000	

对于德国还有：

最初的攻击兵力：$t=0$　$G(0)=200\ 000$

战斗伤亡：100 000

最后的战斗力：220 000

参 考 文 献

[1] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 2nd ed. New York: Springe-Verlag, 1978. The best book around on the elementary level. Braun introduces Richardson's theory [13] of the arms race on pp. 513-525.

[2] S. J. Deitchman, "A Lanchester model of guerrilla warfare," *Operations Res.*,

vol. 10, pp. 818—827, 1962. A readable account of the topic With a brief introduction to Lanchester's laws.

[3] J. H. Engel, "A verification of Lanchester's law." *Operations Res.* (*J. Operations Res. Soc. Amer.*), vol. 2, pp. 163—171, 1954. The source of our analysis of the battle of Iwo Jima. Should be accessible to the undergraduate.

[4] G. W. Garand and T. R. Strobridge, *History of United States Marine Corps Operations in World War* Ⅱ, vol. 4 [*Western Pacific Operations*], Histor. Div. Hdqr. USMC, 1971. An extensive treatment of the planning and execution of the Iwo Jima operation. No mathematics at all.

[5] G. H. Hardy, *A Mathematician's Apology*, 2nd ed. New York: Cambridge Univ. Press, 1967, pp. 140—141. From the book jacket: "…a personal account by a distinguished mathematician of what mathematics meant to him as a man. Hardy discusses and illustrates the attractive force of mathematics. He dismisses its utility but describes its depth and beauty as a creative art."

[6] Homer, *The Iliad*, G. Chapman, tr. New York: Pantheon Books, 1956, V. 1. The lines quoted are from Book XIII, lines 571—575.

[7] G. J. Hueter, M. A. McClelland, L. A. Resner and M. G. Zevallos, "An application of the Lanchester model to the battle of the Ardennes," *Interface* vol. 5, no. 1, pp. 15—26, 1978. Avaialable from Department of Mathematics, Harvey Mudd College, Claremont, CA 91711.

[8] D. R. Howes and R. M. Thrall. "A theory of ideal linear weights for heterogeneous combat forces," *Naval Res. Logistics Quart.*, vol. 20, pp. 645—659, 1973. We have considered only homogeneous forces, Howes and Thrall take up the more realistic heterogeneous case using the techniques of linear algebra. Accessible to students at the end of a linear algebra course. Good bibliography.

[9] F. W. Lanchester, *Aircraft in Warfare, The Dawn of the Fourth Arm*, Constable and Co., Ltd, 1916. This book is hard to find now but is the basic source.

[10] F. W. Lanchester, "Mathematics in warfare," in *The World of Mathematics*, vol. 4, J. R. Newman, Ed. New York: Simon and Schuster, 1956, pp. 2138—2157. This article is taken from Lanchester's book and is a readable introduction to his simplest models. Lanchester relates heterogeneous forces to the Pythagorean theorem.

[11] C. P. Morehouse, *The Iwo Jima Operation*, Histor. Dv. Hdqr. USMC, 1946.

Contains the daily American casualty lists for the battle; book is hard to find.

[12] R. F. Newcomb, *Iwo Jima*. New York: Holt, Rinehart, and Winston, 1965. A fairly complete account of the battle; shorter than Garand and Strobridge (and not as incisive), not mathematical.

[13] L. R. Richardson, "Mathenatics of war and foreighn politics," in *The World of Mathematics*, vol. 4, J. R. Newman, Ed. New York: Simon and Schuster, 1956, pp. 1240—1253. Richardson was a physicist with a Quaker background whose aversion to war led him to make a serious study of its causes. In this very readable essay he uses differential equations to model the arms race. (See also Braun[1].)

[14] H. K. Weiss, "Lanchester-type models of warfare," *Proc. Ist Internat. Cingr. on Operations Research*, Baltimore, MD 1957, pp. 82—99. A good survey of the basic models and some of their extensions.

教 师 参 考

目的 本章的目的就是阐明数学模型如何用来描述一场战斗。关于这样一种应用的道德问题，不谈及其效用也是值得关注的事情。在使用本章的课堂上，可给予充分的讨论。

预备知识 可分离微分方程，关于一个二阶标量微分方程的参数变值法，双曲函数（或相当的指数形式），对积分求微分的莱布尼兹法则。

时间 用1～2次讲座即可。

第 9 章

用频率响应的方法建立线性系统的模型

William F. Powers*

1. 引　　言

在《控制论》(参见[1])这部经典著作中，Norbert Wiener 从信息处理和控制系统的角度对人类进行了观察。这种曾经促使通信和控制系统发展的观点，使数学模型面向人类行为和人体的生理部分。这部著作的很多地方都涉及到频率响应技术，本章将论述这种技术在数学建模中的应用。

简单地说，频率响应技术是基于函数的傅里叶展开式。这些展开式是以分量之"和"的形式来描述一个函数的，而这些分量又具有各种频率，它们组合成所要讨论的函数。例如，如果 $f(t)$ 具有一个傅里叶级数表示式

$$f(t) = \sum a_n \sin(nt),$$

那么，不同的正弦函数就代表不同的频率，各系数就是它们组合时

---

* Control Systems Department, Ford Motor Company, Dearborn, MI 48121.

所加的“权”。(非周期函数 f 可表示成像

$$f(t)=\int a(x)\sin(xt)\mathrm{d}x$$

这样的傅里叶积分，所用的频率是一个连续系统，权为 $a(x)$。)这样，通过了解系统对正弦输入的响应就可重新得到系统的动态特性。

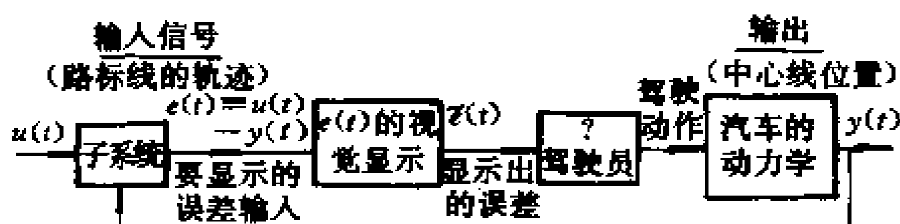


图9.1

本章的重点将放在建立人的模型上，这个“人”就是“补偿作业”中的操作者。更具体地讲，就是根据某些实验数据获得操作人员的数学模型，在这些实验中，操作人员要通过操纵一个已知控制动态的控制系统，消除可见的误差信号。可见的误差信号是随机的或“随机出现的”。模拟汽车驾驶就是一个这样的例子。汽车的中间线与随机出现的路标线输入之间的偏差通过显示器告诉给驾驶员。驾驶员转动方向盘，汽车路线因此而变化，从而误差信号也就变化，假设已知受控系统的动态特性。在我们的例子中这个系统就是汽车驾驶系统。图9.1给出的是关于这种情况的一个“反馈”框图。通过误差信号(程序化的路标线的路线减去实际的路线)和输出(作为结果的汽车中心线位置)的频率响应分析可为驾驶员建立一个近似的数学模型。即给出由驾驶员观测的对误差的度量 $\tilde{e}(t)$ 和输出 $y(t)$，人们就可以运用频率响应方法确定一个联合的驾驶员一汽车系统模型(见图9.2)。既然汽车的数学模型是已知的了，那么，驾驶员的数学模型就可由联合模型导出。

上面所讨论的建模类型是一个活跃的研究领域，由这种方法

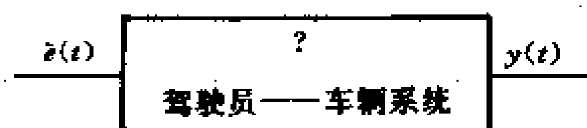


图 9.2 用于分析的输入一输出系统

产生的许多模型已运用于实际中，例如，人们用这种分析方法已证明，在发生意外的情况下，土星阿波罗太空助推器可在宇航员的人工操作下飞行(参见[2])；由于人的能力问题，在一定情况下，超过当前公路允许指标的卡车和公共汽车有可能失去控制(见[3])；以及从飞机设计中的驾驶员模型得出的结论最终促成了飞机性能的改进(见[4])，另外，在许多生理学模型的产生过程中也用到这种建模技术，[5]—[7]对其中的一些模型作了研究。

本章其余的内容如下：在第2节中，我们将讨论操作人员模型建模问题的实验方式，同时还要讨论采用频率响应技术的动机。第3节将提出一个由教师指导的建模问题，它将说明基本的数学方法(如果教师愿意，可让学生自己做实验并建立问题的模型)。第4节给出了实际的操作人员实验数据，以供学生进行建模和处理。最后，在第5节中，我们简要地讨论了一些补充知识，它们涉及到较深奥的数学问题，同时提供了适当的参考文献。

2. 建立操作人员模型

由于人具有很大程度的不确定性，因此，不能期望一开始就能构造出关于人的行为的数学模型。不过，对于某些规定了只有一名操作人员的作业，可望为标准的(正常的)作业操作者建立一个很好的近似的数学模型。这样的模型对特殊作业设备的设计工作是有用的。在这一节中，我们将讨论一些要考虑的基本事项，在建立

补偿作业(即消除误差)的操作人员模型中要涉及到它们。

假设给操作人员规定好一个作业，现在，我们要设计一项实验，以产生能用于建模的数据。图9.3显示了一个典型的实验室，它是为建立补偿作业模型的实验而建立的。操作人员通过移动操纵杆来消除屏幕上显示的随时间变化的误差信号。计算机一方面显示出误差信号，另一方面也控制着受控物理系统(如汽车、飞机等)的动态变化。

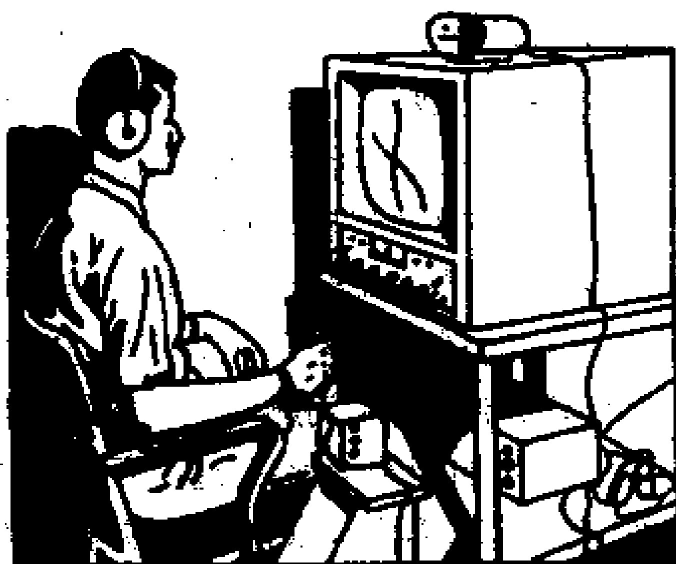


图 9.3

由于这样一个实验包含了人的因素，因此，必须考虑一些事项。其中的主要几点叙述如下：

(1) 激发：在实验期间，应将人的能力激发到接近他们的最佳程度。

(2) 学习：典型地，对于一个人来说，实验做得越长，做得就越好一直到达到某一程度。这样一个时期就是学习时期，它不应是数据带的一部分。于是在收集数据之前受试者要做一些试验性的实

验。

(3) 训练：在做一项补偿作业时，某些受试者会比另一些受试者要好；如飞行员与非飞行员受试者相比，通常前者要熟练些。应该注意这样的信息，因为它将影响模型的参数。

(4) *注意力时间*：要得到一个理想的数据带，就应进行足够长时间的实验，但也不能太长以至于受试者失去兴趣或注意力分散。典型的实验（如图9.3）约2～5min，其中由于学习和注意力减弱，通常还要将开始和结束的一段时间分别除去。

(5) *身体和心理状态*：应该注意受试者身体和心理的一般状态。（就这一点而言，这样的实验可用来确定某些因素（如药物）对做补偿作业能力的影响。）

(6) *输入信号*：显示出的误差信号既不能太简单以至于受试者很快就能预测出，但也不能复杂得无法作数学分析。

上述最后一个注意事项，即输入信号的数学特征，是关键性的，因为它强烈地影响着数据分析和模型建立过程中所要运用的数学类型。我们来考虑一些典型的输入，并假定受试者时刻都在观察着这些数据。如果出现一个不变的误差信号，那么对正常的受试者来说，这几乎没有什么麻烦。注意，不变的信号是一个频率为零的正弦波信号（即 $c=c\cos(\omega t)$，$\omega=0$）。其次，假定出现一个频率很低的正弦波信号。这时，受试者仍然可以跟踪这个误差信号。但是，当误差信号的频率增加时，跟踪误差也将增加，最后将达到某一点，此时，受试者已无法对信号进行跟踪，甚至不再知道信号是什么（即出现一个高频正弦波）。这个频率粗略地指示了操作人员能力的"频带宽度"（典型地为5～10rad/s）。由于超出这个频带宽度时，人实际上就无法再进行跟踪了。所以，输入频率高于这个频带宽度的信号对于建立一个人类跟踪误差信号的行为特征的数学模型是毫无用处的。有一种观点认为，可以根据频率将输入信号进行分类。如果我们接受这种分类，那么，可采纳的频率范围就是[0，

BW]，其中 BW＝频带宽度。

因为，在许多电子和机械系统中，频率是很重要的变量，因此，存在大量与系统频率特性有关的数学技术和理论。通常称这种近似法为"频域"近似法。

如果被建模的系统可以近似地看作线性系统，那么，有许多频域结果可直接用于系统识别和建模。不过，人们并不期望操作人员以线性方式行动。事实上，操作人员模型的开创者之一 A. Tustin 用一个简单的实验证明了操作人员的行为是非线性的。正如在下一节中将要证明的，如果一个系统用线性微分方程来描述，并且具有频率为 ω 的正弦强制函数，那么，某些有趣的解（稳态解）中将仅含有频率为 ω 的正弦分量。Tustin 在一项操作人员的实验中使用了一个含三种不同频率的正弦波的输入，结果，得到一个频率不同于三种输入频率的输出（参见[8]）。这个结果意味着操作人员是非线性的。不过 Tustin 也认为对于许多作业来说，操作人员是接近线性的，而且有一个近似的线性模型可以说明操作人员的输出的主要性质。由此，在建立操作人员模型的过程中，人们经常采用线性分析的频域技术。

在下一节中，我们将讨论与频域模型有关的基本确定论技术。要对与操作人员模型有关的技术作一个全面的讨论，还需要一定的随机过程理论。确实，输入函数族经常是随机的。通常是具有随机的振幅和相位的正弦函数之和；典型地，在区间[0，BW]上通常要用到几种或更多种频率，所以说，频率的出现是随机性的。不过，即使在这样的情况下，最后的模型通常还是一个确定论的模型，下一节介绍的数学知识将使我们对数学与模型之间的相互作用有一个较好的理解。随机过程技术主要用于生成实验数据以及解释模型的线性逼近等方面。

3. 频率响应模型的性质和技术

本节我们要描述一个简单的实验并用它说明具有频率响应的数学模型。对于了解一点工程或物理背景的学生，显然，运动的控制方程是由牛顿定律给出的。不过，对于不了解这些背景的学生，这个实验说明了一种"发现"，这些规律(或模型)的方法以及频率响应技术所蕴含的数学思想。

3.1 实验的描述

下面的简单实验将把与应用频率响应标示图的有关思想和数学技术引入线性或近似线性动态系统的建模中。

实验 把橡皮筋扎起来，直到近似2ft 的长度，并在一端系上一重物，如螺栓。我们的目的是要建立该系统的模型，从而预测手在 a 点处随时间变化的运动(即输入)所引起的重物运动(即输出)(见图9.4和9.5)。

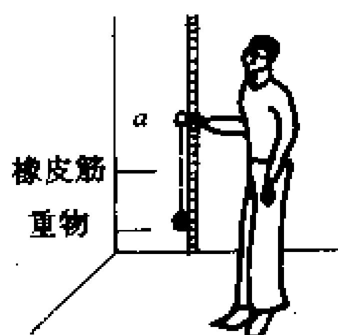


图 9.4 实验装置

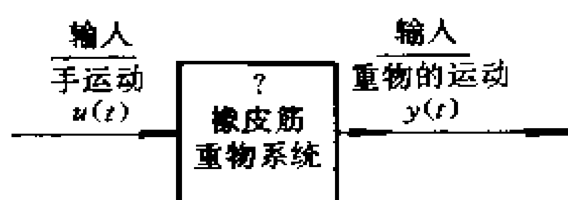


图 9.5 建立问题模型的输入一输出特征

3.2 基于线性微分方程的模型

常系数线性微分方程模型是一种能对所讨论的系统提供有用

的近似描述的数学模型。选择这种模型是基于下面的理由。

所用的微分方程具有形式

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n} + a_{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}t^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = u(t). \tag{1}$$

因左边的系数与 t 无关，故我们称这种方程是时不变的。函数 u 叫做**强迫函数或输入函数**。一个标准的问题就是，对于不同的输入函数，观察系统的行为。我们主要关心形如 $u(t)=\sin(\omega t)$（或这种函数的线性组合）的输入函数。数字 ω 叫做输入的**频率**。如果 ω 较小，那么为低频输入（例如1周/s＝2πrad/s＝1Hz）；如果 ω 较大，则输入为高频输入。

我们假定读者对常系数线性微分方程理论以及解这样的方程所用的 Laplace 变换方法有一个基本的感性了解。在大多数关于初级微分方程的课本中都有这方面的内容，如[20]～[23]。

设 $y(t)$ 满足 $y(0)=y^1(0)=\cdots=y^{(n-1)}(0)=0$ 是(1)的解，取(1)的 Laplace 变换，得变换方程

$$(s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0)V(s) = W(s),$$

其中 V 和 W 分别是 y 和 u 的 Laplace 变换。如果 s 不是 $s^n + a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1 s+a_0=0$ 的根，则

$$V(s) = \frac{W(s)}{s^n + \cdots + a_1 s + a_0}, \tag{2}$$

或

$$V(s) = W(s)Y(s),$$

和

$$Y(s) = (s^n + \cdots + a_1 s + a_0)^{-1}. \tag{2a}$$

函数 Y 叫做方程（或用该方程建模的物理系统）的**传递函数**。方程(2a)说明 y 的 Laplace 变换可由 u 的 Laplace 变换与传递函数的乘积求得。通过观察，读者会注意到，由(1)可以确定出传递函数；反过来(1)中的系数也可由传递函数确定。现在我们考虑线性时不变

微分方程的一些非常重要的性质。

定义 如果微分方程

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = 0$$

的所有解 y 具有性质 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$*，则称该方程是稳定的。

定义 如果对应于(1)的齐次方程是稳定的，则称(1)是稳定的。

在下面的有关地方，j 表示$\sqrt{-1}$. 这个记号在工程文献中是很常用的。

定理1 考虑一个带实系数 $a_0, \cdots, a_{n-1}$ 和 $u(t)=\exp(j\omega t)$ 的具有形式(1)的方程。

a) 当且仅当特征方程 $s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$ 的所有根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 都具有负的实部时，方程(1)是稳定的。

b) 如果 Y((1)的传递函数)在 $j\omega$ 处有定义，那么(1)的通解可写成 $y_g = y_T + y_{ss}$，其中 y_T 是齐次方程的通解，y_{ss} 是由

$$y_{ss}(t) = Y(j\omega)\exp(j\omega t) \tag{3}$$

定义的(1)的稳态解。如果所有 λ_k 都可区别，则 $y_T(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} c_k \exp(\lambda_k t)$.

c) 如果(1)是稳定的，那么 $\lim\limits_{t\to\infty} y_T(t)=0$ 且 y_g 渐近于 y_{ss}. 函数 y_T 叫做 y_g 的暂态部分。

关于这个结果的证明在教课书[21]中很容易得到。也可以把这个证明(或证明的某些部分)作为课外练习。

这个定理的 b)部分说明了线性时不变动态系统与正弦输入间的内在联系：模拟这样一个系统的方程稳态解是传递函数在 $j\omega$ 处的值与输入的简单乘积。在大多数输入一输出分析中，稳态解具

---

* 有些学者称该方程是渐近稳定的如果对每一个解 y, $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$.

有首要意义，因为，当系统稳定时暂态解就消失了。

方程(3)的重要性表现在，它指出了发展识别线性时不变系统动态特性的实验技术的关键。考察图9.6中的输入一输出框图，我们看到，通过对输入信号族的适当选取(这在模拟问题中总是一个关键性的决策)，我们就可以由(3)构造出复函数 $Y(j\omega)$. 然后所剩问题就是用曲线拟合或参数估计法来确定变换函数 $Y(s)$，从而确定未知系统的动态特性。

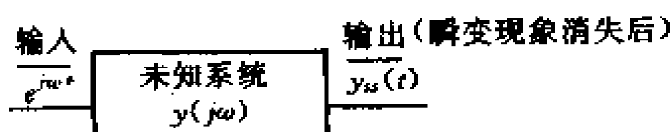


图 9.6 未知系统的频率响应识别

3.3 频率响应图

用频率响应方法对未知系统进行建模的实验通常归结为频率响应图。它是复函数 $Y(j\omega)$的振幅和幅角(相位)关于频率 ω 的图像。更准确地讲，如果 $M(\omega)=|Y(j\omega)|$ 及 $N(\omega)=\arg(Y(j\omega))$(从而 $Y(j\omega)=M(\omega)e^{jN(\omega)}$)，那么，振幅图就是 $M(\omega)$关于 ω 的图像。工程中常用对数刻度 $\log_{10}M(\omega)$对 $\log_{10}\omega$ 作振幅图；用以度表示的相位角对 $\log_{10}\omega$ 作相位图。用 $\log_{10}\omega$ 替代 ω 是因为这样可以包括更大范围的数值，而用 $\log_{10}M(\omega)$是因为它可以使图像处理更容易些(函数乘积的图像成为图像之和)。图9.7和9.8给出了一个典型的二阶变换函数

$$Y_2(s)=\frac{1}{1+2as+s^2},0<a<1 \tag{4}$$

的振幅图和相位图。(在[9,ch.15]中可以看到更多的例子。)陈述了下面的定理1(b)的推论之后，我们将着手橡皮筋一重物的建模问题。

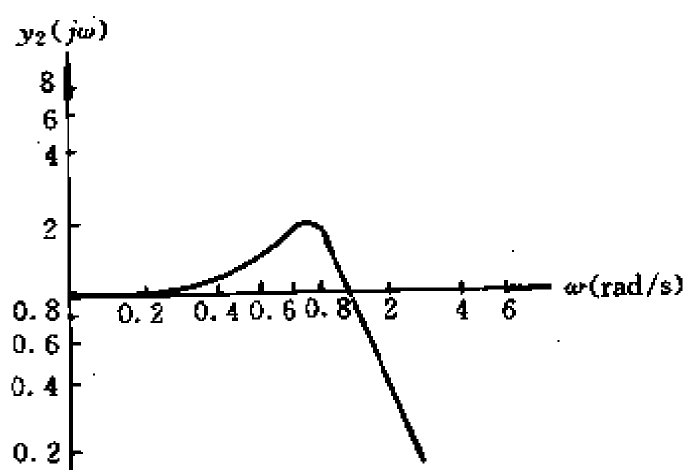


图 9.7 二阶系统的振幅图(方程(4),$a=0.25$.注意 log 坐标。)

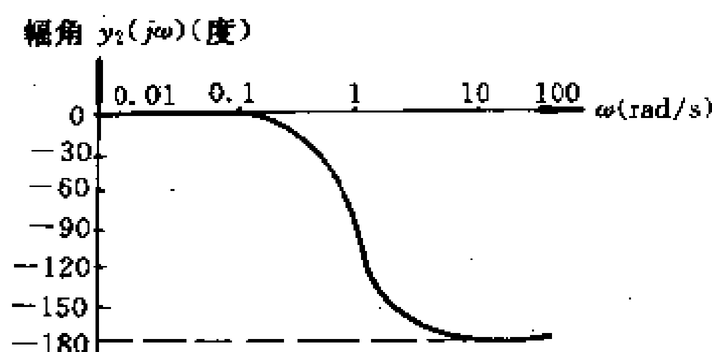


图 9.8 二阶系统的相位图(方程(4),$a=0.25$)

推论 考虑具有形式(1)的一个方程,它具有实系数,且 $u(t)=\sin(\omega t)$. 则 $y_{ss}(t)=M(\omega)\sin(\omega t+N(\omega))$, 其中 $Y(j\omega)=M(\omega)e^{jN(\omega)}$.

证明 $y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=\sin(\omega t)$的稳态解 $y_{ss}(t)$是

$$y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0y=e^{j\omega t}$$

的稳态解 $\tilde{y}_{ss}(t)$的虚部。于是

$$\tilde{y}_{ss}(t)=Y(j\omega)e^{j\omega t}=M(\omega)e^{jN(\omega)}e^{j\omega t}$$
$$=M(\omega)e^{j(\omega t+N(\omega))}$$

$$= M(\omega)[\cos(\omega t + N(\omega)) + \mathrm{j}\sin(\omega t + N(\omega))],$$

及

$$y_{ss}(t) = M(\omega)\sin(\omega t + N(\omega)).$$

这个推论的意义是，如果系统的输入信号是 $\sin(\omega t)$，那么输出就具有频率 ω、振幅 $M(\omega)$ 以及相移 $N(\omega)$ 的正弦信号。

3.4 线性性与时不变性

3.2节和3.3节中提到的数学结果仅适合于线性时不变微分方程。因为这些结果直接导致了由输入和输出数据来确定这样一个未知系统的动态模型的过程，所以，它将便于检查在一定的运行范围内，这些条件(线性性和时不变性)是否满足或近似地满足。

在许多情况下，通过对系统及其运行环境的考虑，可预先解决时不变性问题。例如，在橡皮筋一重物实验中，系统参数(如重量、橡皮筋的弹性)都不随时间而变。不过，环境参数(如风)会随时间而变。自然，人们都希望在一个始终不变的环境中进行这项实验，这样就可以排除出现时变动态的可能。

线性性问题就比较困难了。很少有一个物理系统在一个大范围内的运行是绝对线性的。但是，如果在感兴趣的运行条件下，系统是接近线性的(即系统不需要对所有参数值都接近线性)，那么，利用线性模型就可获得理想的结论。由(1)描述的系统具有如下性质：对于每一对输入一输出(u_1, y_1)和(u_2, y_2)

(i) $u_1 + u_2$是一个合理的输入。而且对应于这个输入的输出为 $y_1 + y_2$；

(ii) 对任意常数 α，输入 αu_1 是合理的，而且对应的输出为 αy_1.

为了检验一个系统是否可以用(1)来描述，可利用各种输入及其输入之和，并观察它们的输出。如果在输入的某个频率范围内(i)或(ii)成立，那么，作为运行前提可认为系统能如此描述。定理1的推

论提供了另一种检验。如果正弦输入具有频率 ω,那么,输出也必具有频率 ω,尽管一般地会出现一个相移。

3.5 实验程序

我们对3.3节的推论作了系统的阐述,这样,由此推导出的数学结论就可直接运用于特别方便的实验输入 $\sin(\omega t)$. 为了进行实验,将橡皮筋的一端系在你的手指上,让一位助手记录考察结果。

1. 非常缓慢地上下移动你的手,设想你的手描绘的是一个关于很低的不变频率的正弦函数,例如频率是4或5秒钟一个周期。振荡的振幅大致地应为3～5ft. 而且尽可能地保持不变。结果应是重物的移动与你的手同步;即振幅相同,相位的改变几乎察觉不出。把这些值描绘到频率响应图上,即振幅系数$\triangleq M(\omega)\approx 1$,相位$\triangleq N(\omega)\approx 0°$(其中 ω 非常小)。描绘出的点应粗略地对应于图9.9和9.10上的点①。

2. 逐渐增加手的运动频率,但保持振幅差不多不变。你将开始感到重物与手的相对运动已发生变化。粗略地估计这个运动的频率以及结果的振幅比和相位滞后。(重物的振幅应比手的振幅大,重物应滞后于手的运动。)将这些点描绘在频率响应图上;它们应粗略地对应于图9.9和9.10上的点②.

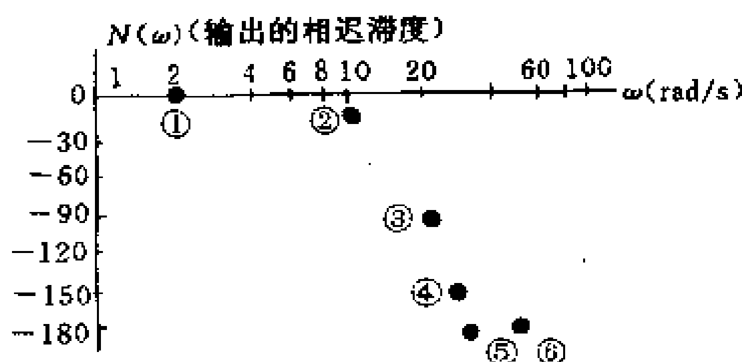


图 9.9 对于 $\sin\omega_i t$ 重物位置的振幅比。由手输入。

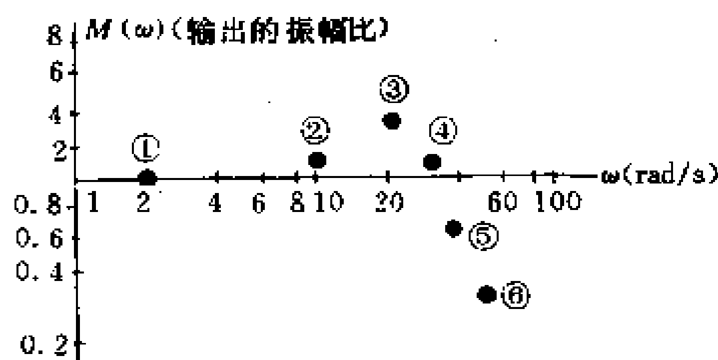


图 9.10 重物位置相对于手的位置的相位延迟

3. 以离散的步幅继续增加运动频率(手的振幅不变),并在重物的最大振幅处粗略地估计其频率、振幅比以及相位滞后。重物在这点处的运动可能有点杂乱(这表明系统的共振域,即输入频率与系统的自然频率相近)。将这些点描绘在频率响应图上;它们应粗略地对应于图9.9和9.10上的点③. 如果实验做得仔细,相移几乎恰好是$-90°$.

4. 继续上述实验并描绘出对应于更高频率的点,我们可以清楚地看到振荡的振幅减小。不过(用眼)很难看出相位滞后是增大的(由于重物作低幅振荡)。当ω增大时,相移将近似于$-180°$(图9.9和9.10上的点④、⑤、⑥)。

现在,频率响应图已作成,可以构造数学模型了。下面的定理在这部分内容中特别有用。

定理2 假设(1)是稳定的且Y是变换函数。则

a) $\lim\limits_{\omega\to\infty} M(\omega) = \lim\limits_{\omega\to\infty} |Y(j\omega)| = 0.$

b) $\lim\limits_{\omega\to\infty} N(\omega) = \lim\limits_{\omega\to\infty} (\arg \cdot Y(j\omega)) = -n\pi/2(\text{rad})$

其中n是(1)的阶数。

证明 因为

$$\lim_{\omega\to\infty} \omega^n Y(j\omega) = j^{-n},$$

从而

$$|Y(j\omega)| \text{ 渐近于 } |\omega^{-n}|,$$

由此可得出结论 a)成立，且

$$\arg(Y(\mathrm{j}\omega))\arg(\mathrm{j}^{-n}) = n(-\pi/2).$$

于是得结论 b)。

如果高频数据非常精确(回忆一下我们在测量高频相位角中的困难)，那么，在用微分方程模拟我们的动态系统时，这个定理就为我们提供了估计方程阶数的数学基础。

在我们的例子中，我们是通过确定图9.10中的相位角的渐近值来估计方程的阶数的。这个值是 $-\pi = 2(-\pi/2)$，它意味着可以用一个二阶微分方程近似地模拟这个动态系统。

注意：可以证明(作为一个练习)当 $\omega \to 0$ 时，振幅图的斜率亦可给出微分方程的阶

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{\mathrm{d}(\log_{10}|Y(\mathrm{j}\omega)|)}{\mathrm{d}(\log_{10}\omega)} = -n.$$

现在我们已经知道，一个二阶微分方程为系统提供了一个近似模型，我们可用一条关于振幅图的最小平方曲线拟合和一个参数优化程序来完成这个模型。即我们已推断出方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + a_1 \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + a_0 y = u$$

是系统的数学模型的理想候选者，而我们只须确定参数值 a_0, a_1，用它们给出关于图9.9中数据的理想的曲线拟合。

注意：Bode 证明了(见[10]，[12])，对于具有形式(1)的稳定的微分方程，相位图由振幅图唯一地决定。这样，最小平方曲线拟合只须在振幅图上进行。

3.6 a_0, a_1 的确定(最小平方与函数极小化)

我们知道，就这个问题而言，传递函数具有形式

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + a_1 s + a_0}$$

其中 a_0 和 a_1 为常数，而且我们拥有 m 个具有形式 (ω_i, M_i) 的实验测量结果，其中 M_i 为观测到的关于输入 ω_i 的振幅。现在的问题是怎样确定常数 a_0 和 a_1. 我们所用的方法是，用 $M(\omega)=|Y(j\omega)|$ 以尽可能好的方式拟合观测到的数据，至于怎样才算"最好"，还有待于定义。

对每一个 i，我们有一个观测值 M_i 和理论值 $|Y(j\omega_i)|$. 其差 $|Y(j\omega_i)-M_i|$ 就是第 i 次测量的"误差"。我们希望以误差的平方和最小这样的方式来选择 a_0 和 a_1. 即要使函数

$$f(a_0,a_1) = \sum_{i=1}^{m}(|Y(j\omega i,a_0,a_1)| - M_i)^2$$

最小。从许多方面可以证实，选取最小平方误差作为对拟合质量的度量是常用的方法。当然，也可以在不同的度量中任意挑选一种。

如果有人怀疑高频数据不如其余数据可信，他就会希望降低这种数据的重要性，而以函数

$$f(a_0,a_1) = \sum_{i=1}^{m} W_i(|Y(j\omega_i;a_0,a_1)| - M_i)^2$$

取而代之，其中 $W_1, W_2, \cdots, W_n$ 为常值权系数。权的选取将依赖于特定的数据与实验程序。

对给定的(5)，有许多现成的计算机子程序可用来确定 a_0 和 a_1，例如 IBM 科学子程序手册([13])中的 FMCG，FMEP，以及 NEWT. 或者根据梯度法或牛顿法构造一个算法也不困难。

梯度法一开始就猜测

$$\begin{bmatrix} a_0^{(0)} \\ a_1^{(0)} \end{bmatrix}$$

根据公式

$$\begin{bmatrix} a_0^{(J+1)} \\ a_1^{(J+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^{(J)} \\ a_1^{(J)} \end{bmatrix} - a_J \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a_0}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \end{bmatrix}.$$

构造一个序列

$$\begin{bmatrix} a_0^{(n)} \\ a_1^{(n)} \end{bmatrix}.$$

每一步都选择一个正数 α_J，从而使 f 在第 J 步能有最大的减少。（确定 α_J 的方法和算法的理论详见[14]，[15].）

牛顿法是基于下面的迭代

$$\begin{bmatrix} a_0^{(J+1)} \\ a_1^{(J+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0^{(J)} \\ a_1^{(J)} \end{bmatrix} - D_J^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial a_0}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \\ \dfrac{\partial f}{\partial a_1}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \end{bmatrix},$$

其中

$$D_J = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_0^2}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_0 \partial a_1}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1 \partial a_0}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial a_1^2}(a_0^{(J)}, a_1^{(J)}) \end{bmatrix}$$

在每一种情况下，如果迭代良好，序列

$$\begin{bmatrix} a_0^{(J)} \\ a_1^{(J)} \end{bmatrix}$$

将收敛于值

$$\begin{bmatrix} a_0^{(*)} \\ a_1^{(*)} \end{bmatrix}$$

它使 $f(a_0, a_1)$ 最小。每一种方法都有其利弊。

1） 如果牛顿迭代法的初始参数估计得不好，那么序列就可能不收敛。如果估计得好，则通常收敛得很快。

2） 在相继迭代时，梯度法总能减小函数 $f(a_0, a_1)$，不过收敛速度可能慢得让人不能容忍。

现成算法 FMCG 和 FMFP 分别利用了共轭梯度法和 Davidom-Fletcher-Powell公式，这些算法克服了经典的梯度法和牛

顿法的各自缺点。有关算法的理论和某些有代表性的模拟请看[14]和[15].

3.7 模型的检验

假设参数 a_0和 a_1的最优值 $\bar{a}_0$,$\bar{a}_1$已确定。我们要问

(1) 关于系统是近似线性的原始假设是合适的吗?如何检验?

(2) $\bar{a}_0$的物理意义是什么?如何检验推测出的意义?

(3) $\bar{a}_1$的物理意义是什么?如何检验推测出的意义?

在检验模型时,人们可以希望只展开那些必要的条件,在这种意义下,每个模型都是试验性的。例如,我们考虑一下人们将如何回答上面的第一个问题。如果系统确实是线性的,那么,对于任意两个输入的和 u_1+u_2,其输出必定与独立的输入 u_1及 u_2的输出之和相同,且输入 αu(α=常数)的输出必等于输入 u 的输出乘以 α.因为只可能检查有限个输入,所以,对于这种方法检验模型的有效性我们仅仅积累了必要的条件。在实践中,人们利用这种检验来描述线性作业的范围(例如,我们的系统并不真正是线性的,但在某个频率范围内它非常接近线性)。

最后,我们来谈谈本节一开始提出的第二个和第三个问题,即 a_0、a_1的物理特征。在我们的系统中只含有两个不同的元素:橡皮筋和重物。于是 a_0、a_1的物理特征主要由这两个元素提供。另外,必须考虑实验环境,因为它在某种程度上会影响 a_0,a_1的值。例如,假设在水中进行同样的实验,那么这种实验环境就不能使我们确定一个准确的模型。这一点在生物系统的模型中特别重要,因为,在一种合理的实验环境中,被模拟的器官不能被隔离起来。

空气将影响 a_0,a_1的值,但如果重物足够重,则影响可减至很小。假定 a_0,a_1主要由橡皮筋和重物所决定。现在,我们来确定他们是怎样相关联的。我们的最初想法是,每一个参数可能仅受一个分量的影响,例如 a_0仅受重物的影响,a_1仅受橡皮筋的弹性影响。为

了检验这些设想，学生可分别变化重物和橡皮筋的弹性并对参数a_0，a_1重复进行估计。实际上，这个系统基本上是一个弹簧－质量－阻尼器系统，如图9.11所示（被理想化了）。这种系统的通常模型（基于牛顿定律，见[21，p.2]），产生方程

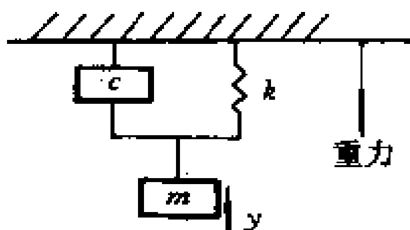


图 9.11　系统的弹簧－质量－阻尼器示意图

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = 0, \tag{6}$$

或

$$\ddot{y} + \frac{c}{m}\dot{y} + \frac{k}{m}y = 0, \tag{7}$$

其中m是重物的质量，c是橡皮筋的线性阻尼参数，k是橡皮筋的线性弹性常数。于是m主要与重物有关，c和k与橡皮筋有关。参数a_0，a_1与系统参数间的关系为

$$a_0 = \frac{k}{m}, a_1 = \frac{c}{m}. \tag{8}$$

这样，如果用各种重量的物体和不同粗细的橡皮筋进行足够多次的实验，那么，数据将会（粗略地）表明这些关系。

4.　设计：操作人员实验数据

在这一节，我们将从实际实验中提取数据进行分析和阐述。在提供数据前，需要涉及所有操作员都显现的进一步的数学性质，即非线性性。这种非线性就叫做**固有时延**或传递时滞，这是由于操作人员对刺激不能迅速作出反映的结果。（对于简单的补偿作业，这个延迟时间大概是0.2～0.4s。）尽管如此，由于下面的事实，我们的问题很容易合并到线性频域分析中。

定理3 假设对于 $s \geqslant s_0$，u 的 Laplace 变换 W 存在，且定义 y 为

$$y(t)=\begin{cases}0, & t\leqslant\tau,\\ u(t-\tau), & t>\tau.\end{cases}$$

则 $L[y]$的 Laplace 变换与 W 有关

$$L[y](s)=e^{-\tau s}W(s)，对于 s>s_0.$$

这是与 Laplace 变换相联系的一个事实。它意味着如果 y 被视作输出以及 u 被视作输入，那么 y 严格地跟随着 u 但要延迟 τ 个时间单位。如果在反馈控制回路（如同图9.1那样）中插入一个这种类型的非线性元件，那么，在运用频域技术时就没有什么困难了。确实，如果变换函数 Y 具有形式 $Y(s)=e^{-\tau s}$，那么

$$|Y(j\omega)|=1，且 \arg Y(j\omega)=-\tau\omega,$$

即幅频响应不受 $Y(s)$的影响，而相位都减小 $\tau\omega$.

实验数据 在最早的一种综合性操作人员模型的设计中，Elkind（见[16]）曾得出了这些数据。这项实验的装置如图9.12所示。这个装置与图9.1的不同之处就在于，它在回路中没有车辆动态特性（或飞机动态特性）。在[2]，[3]，[8]，[17]及[18]中提出了车辆动态特性实验。这部分实验主要关心确定操作人员传递函数的模型，其输入具有各种频带宽度，即分量的频率范围。由实验产生的幅度和相位频率响应图如图9.13所示。

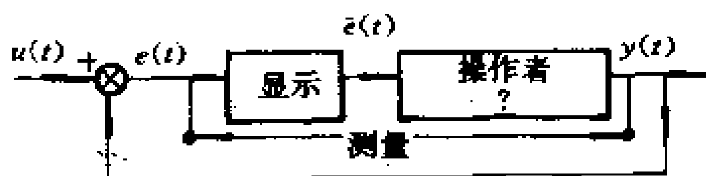


图 9.12

每个图上的四条曲线都对应着四个具有不同频带宽度的输入，其中 $R.16$和 $R.64$分别代表最小和最大频带宽度。标号为R.64

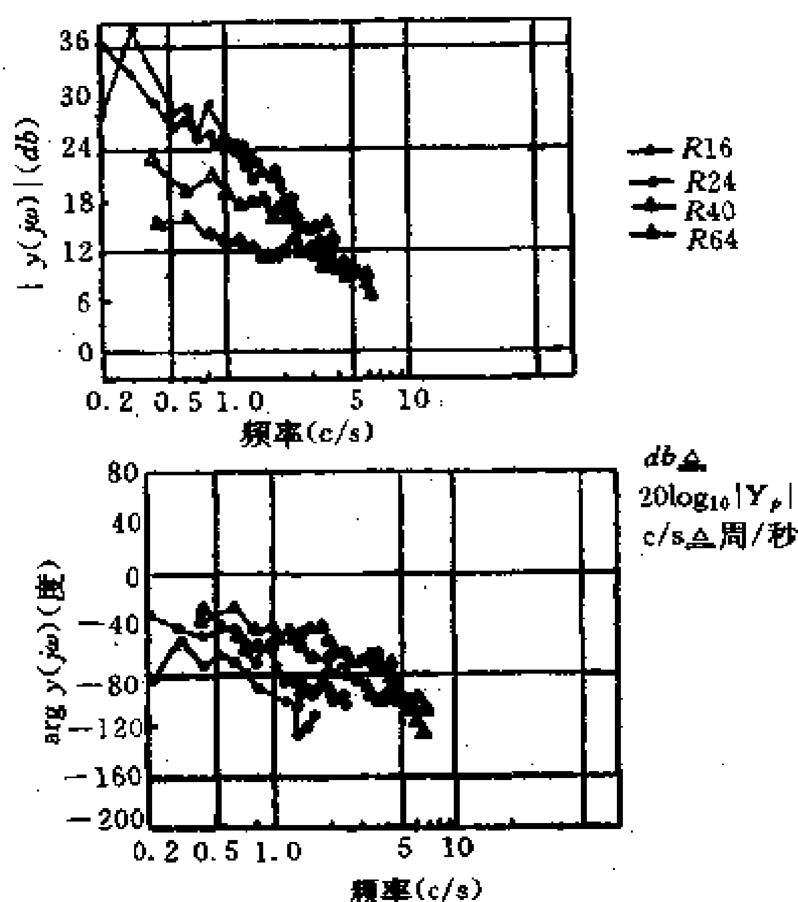


图 9.13 由实验得到的频率响应图

的输入具有比其它输入更高的频率分量。(标号 R.16等是指输入函数的长方形幂谱有特定的截止频率。R.16情况是16c/s. 有关定义和详细内容见[17a].)忽略显示器的动态，这样该图就代表了操作人员的传递函数。

关于讨论和分析的几个问题

1. 讨论操作人员的反应与输入频带宽度间的关系。(粗略的答案：当频带宽度增加时，响应的幅度就减少且相位滞后也减小。于是，如果输入具有较高的频率分量，操作人员就作较小的运动，这在相位同步中可能有用。)

2. 图9.13中数据的合理传递函数是什么?Elkind 提出

$$YP_1 = \frac{Ke^{-\tau s}}{(Ts+1)}. \tag{9}$$

对幅度和相位进行曲线拟合的数值结果如下(见[17b]).

输入	τ(s)	T(s)	K(dB)
R. 16	0. 64	4. 55	34. 5
R. 24	0. 264	3. 18	31. 5
R. 40	0. 214	1. 27	22. 5
R. 64	0. 183	0. 58	15. 0

如果可以用计算机程序，那么参数优化方案可用于参数的求解；另外，对 τ,T,和 K 作为输入频带宽度之函数的趋势也可作粗略的估计。

这些参数值意味着操作人员的“增益”(K)随频带宽度的增加而减少，这与直观结果是一致的。$(Ts+1)^{-1}$项叫做“一阶延迟”，因为它引起相位延迟的一个增加，且已被归咎于神经与肌肉的一种延迟，它与知觉输送延迟 τ 相反。注意，当输入频带宽度增加时，T 趋于0，这意味着当增加频带宽度时，操作人员的行为就趋向于更像一个单纯增益和单纯传递延迟。

在[17]中人们注意到，如果把(16)的模型插入到一个反馈控制回路中，结果得到的反馈系统在高频处是不稳定的，这样人们就提出下面的模型来表示一个稳定的反馈系统：

$$YP_1 = \frac{Ke^{-\tau_1 s}}{(T_0 s+1)(T_1 s+1)}. \tag{10}$$

由这个模型得到下面的数值(见[17a],[17b])

输入	τ_1(s)	T_0(s)	T_1(s)	K(dB)
R. 16	0. 110	4. 55	0. 531	34. 5
R. 24	0. 104	3. 18	0. 161	31. 5
R. 40	0. 138	1. 27	0. 081	22. 5
R. 64	0. 150	0. 58	0. 033	15. 0

这些值被认为是合理的。典型地，$0.1 \leqslant \tau_1 \leqslant 0.2$主要归咎于传递延

迟；T_1归咎于神经与肌肉延迟；而T_0是一个依赖于被控制者和输入频带宽度的延迟。[17]和[18]给出了进一步的讨论。

5. 更深一步的论题

第4节中数据的产生涉及了随机输入及其相关的方法。对于作为结果而产生的操作人员模型，我们可以更精确地称之为"描述函数的随机输入法"，有关的理论见[19]. 不过，在控制系统的分析与模型的阐述中，人们将它们视为传递函数来处理。如果希望对数据产生过程有比较透彻的了解，那么，具备随机过程知识的学生可参看[19]中的介绍。

这一领域的最新研究，包括多作业模型的发展、最优化的应用以及对模型发展的状态估计(这里假定操作人员是在固有约束条件下的一个最优信息处理机的控制者)。最新结果通常发表在人工控制年会上，并由 NASA，美国空军或一个主办大学出版一份会议录(如参看 NASA，SP-144，NASA SP-214)。

参 考 文 献

[1] + N. Wiener, *Cybernetics*. Cambridge, MA: MIT Press, 1948, 1961 (paperback)

[2] H. R. Jex et al., "A study of fully-manual and augmented-manual control systems for the Saturn V booster using analytical pilot models," National Aeronautics and Space Administration, Rep. NASA CR-1097, 1968

[3] D. H. Weir and D. T. McRuer, "A theory for driver steering control of motor vehicles," *Highway Res. Rec.*, vol. 247, pp. 7—28, 1968.

[4] + D. T. McRuer, "Development of pilot-in-the-loop analysis," *AIAA J. Aircraft*, vol. 10, no. 9, pp. 515—522, Sept. 1973.

[5] + J. H. Milsum, *Biological Control Systems Analysis*. New York: McGrawHill, 1966, pp. 242—252, 418—425.

[6] G. A. Bekey, "Parameter estimation in biological systems: a survey," in *Identifi-*

cation and System Parameter Estimation, P. Eykhoff, Ed. New York: American Elsevier, 1973.

[7] P. Eykhoff. *System Identification.* New York: Wiley, 1974, ch. 14.

[8] A. Tustin. "The nature of the operator's response in manual control and its importance for controller design," *J. Inst. Elec. Engineers* (England), vol. 94, Part IIA, no. 2, pp. 190—202, 1947.

[9] ++ J. J. DiStefano, A. R. Stubberud and I. J. Williams, *Schaum's Outline on Feedback and Control Systems.* New York; McGraw-Hill, 1967.

[10] J. L. Melsa and D. G. Schultz, *Linear Control Systems.* New York; McGraw-Hill, 1969.

[11] R. A. Struble, *Nonlinear Differential Equations.* New York: McGraw-Hill, 1962.

[12] H. W. Bode. *Network Analysis and Feedback Amplifier Design.* Princeton, NJ: Van Nostrand Reinhold, 1945.

[13] IBN System/360 Scientific Subroutine Package (360-CM-03X), Version III, IBN Technical Publication Dept. , 1968.

[14] J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables.* New York: Academic, 1970.

[15] + D. M. Himmelbrau, *Applied Nonlinear Programming.* New York; McGraw-Hill 1972.

[16] J. I. Elkind, "Chariacteristics of simple manual control systems," MIT Lincoln Lab. Tech. Rep. III, Apr. 6, 1956.

[17a] + D. T. McRuer and E. S. krendel, "The human operator as a servo system element," *J. Franklin Inet.* , Vol. 267, nos. 5 and 6, pp. 381—403 and 511—536, May and June, 1959.

[17b] USAF Wright Air Development Center Rep. 56—524, Oct. 1957. (The details for [17a] are contained in this report.)

[18a] + D. T. McRuer, D. Graham and E. S. Krendel, "Manual control of single-loop systems," *J. Franklin Inst.* , vol. 283, nos. 1 and 2, pp. 1—27 and 145—170, Jan. and Feb. 1967.

[18b] USAF Flight Dynamics Lab. Rep. AFFDL-TR-65-15, July 1965. (The details for [18a] are contained in this report.)

[19] + D. Graham and D. T. McRuer, *Analysis of Nonlinear Control Systems.* New

York:Dover,1961,1971(paperback),ch. 6.

[20] A. Rabenstein, *Introduction to Ordinary Differential Equations*. New York: Academic,1972.

教 师 参 考

目的 从科学的观点来看,本章涉及到某些问题的阐述,这些问题产生于一些作业的受试者的行为模型的开发中,如驾驶问题。特别地,它说明了频率响应技术在数学模型中的应用。虽然本章是打算作为建模中的一个案例来研究的,但是第3节基本上是独立的并且在普通微分方程课程中也可以使用。下面是各节的概要。

第1节:描述了被模拟者的行为基本类型,并且注意到这些模型以前的应用。这一节主要是叙述性的。

第2节:讨论了一些从涉及受试者的实验中获取数据的问题,也讨论了基本的实验装置。还提出了利用频率响应数学模型的动机。同样,这一节也是叙述性的。

第3节:把一个特殊的数学模型公式化,并对它作了分析。定理1(特别是部分c)、定理2及其推论给出了一些重要结论。这些结论在数学和直观方面对理解这个模型都是有帮助的。事先,教师花一定的时间让学生熟悉频率响应图的基本方面是值得的。3.1节的处理方式取决于可用的时间;这一节的目的是阐明参数估计中最小平方的作用以及函数极小化技术。在3.7节中,考虑了关于验证模型方面的难题。除了检验本章在讨论模型时所出现的专门技术问题外,你还可以提出关于数学模型对这方面贡献的一般哲学问题。

第4节:这一节包含了来自实际操作人员实验的数据。教师可以用各种方式使用这些数据:如1)把数据交给学生,对实验程序只作说明,然后让他们假设模型,估计模型参数,并从直观角度提出肯定或否定模型的论据。或2)把两个模型(9)和(10)连同数据一起交给学生,让他们讨论当频带宽度增加时参数的趋势,并确定模型

中每一个分量的物理基础(这种处理将不需要任何数值方法)。

第5节:主要讨论了最新研究领域,提供了关于最新发展的参考文献。(这样的信息对于那些希望进一步从事这个课题研究的学生是极具吸引力的。)

预备知识 微积分、微分方程、Laplace 变换。

时间 整个内容需4~5次课。

进行设计的学生数量 虽然这个设计可由一人独立进行,我们还是建议两个或三个学生一起做。

子程序(最优化) 函数极小化的 IBM 科学子程序(即 FM-CG,FMFP,NEWT).

可能的地区性专家 教职员中的工程师。



第Ⅳ部分

交通模型

第 10 章

交通管理色灯*中黄灯应亮多长时间?

Donald A. Drew**

1. 问题与模型

让我们来考虑这样一个问题:红绿灯在亮红灯之前黄灯应亮多长时间?在交通管理中,定期地亮一段时间黄灯是为了让那些正行驶在交叉路口上或距交叉路口太近以致无法停下的车辆通过路口。这样,红绿灯应保持足够长时间的黄灯,使那些无法停车的驾驶员有机会在黄灯亮的时候通过路口。对于一位驶近交叉路口的驾驶员来说,万万不可处于这样的进退两难的境地:要安全停车,离路口太近,而要在红灯亮之前通过路口又显得太远了。

关于这个时间的计算,有一个粗糙的"经验方法":对法定追近

---

* 即通常所说红绿灯,在文章中我们将其简称为红绿灯。——译注

** Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12181.

速度的每个10mi/h 亮1s 黄灯。我们来看理论计算是否证实这个经验方法。

驶近交叉路口的驾驶员，在看到黄色信号后要作出决定：是停车还是通过路口。如果他以法定速度（或低于法定速度）行驶，当决定停车时，他必须有足够的停车距离。当决定通过路口时，他必须有足够的时间使他能够完全通过路口，这包括作出停车决定的时间（反应时间）以及通过停车所需的最短距离的驾驶时间。能够很快看到黄灯的驾驶员可以利用刹车距离将车停下。

于是，黄灯状态应持续的时间包括驾驶员的反应时间、他通过交叉路口的时间以及停车所需的时间（刹车距离）。有了这么多的时间，驾驶员就能够在刹车距离内安全停车。

如果法定速度为 v_0，交叉路口的宽度为 I，典型的车身长度为 L，那么，通过路口的时间为 $(I+L)/v_0$.（注意车的尾部必须通过路口，这样，路口的实际长度就是 $I+L$.）

现在，我们来计算刹车距离。注意到实际的刹车和停车过程是相当复杂的，驾驶员首先开加速器，然后不同程度地用劲踩住刹车踏板（也许用了气动刹车）使车子减速，直到停止。这些过程的大部分是很难用精确的模型来描述的，因而我们将回避它们。

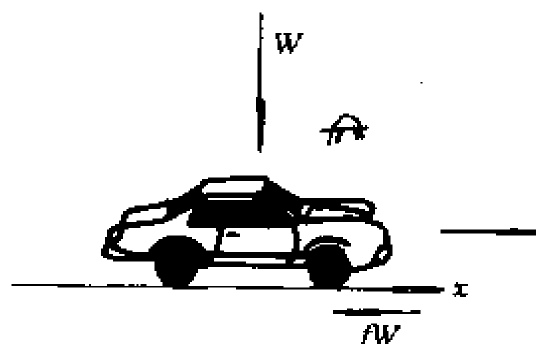


图 10.1 摩擦力

通过在刹车过程引入一个抵抗摩擦力，我们将假定刹车效果可用模型来反映。设 W 为汽车重量，f 为摩擦系数。根据定义，对

汽车的制动力为 fW，其方向与运动方向相反（见图10.1）。汽车在停车过程中，行驶的距离可通过解下面的微分方程求得，这个方程反映的是在常力 $-fW$ 作用下的直线运动：

$$\frac{W}{g} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} = -fW \tag{1}$$

其中 g 是重力加速度。

赋予 x 的正确条件是 $t=0$时，$x=0$以及 $dx/dt=v_0$. 于是，刹车距离就是直到 $dx/dt=0$时汽车驶过的距离。

2. 求 解

在 $dx/dt(0)=v_0$的条件下对(1)积分，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -fgt + v_0 \tag{2}$$

因此，当 $t=t_b=v_0/(fg)$时，速度为零。在 $x(0)=0$条件下对(2)积分，得

$$x = -\frac{1}{2}fgt^2 + v_0t \tag{3}$$

$t=t_b$ 时，x 的值是

$$x(t_b) = D_b = \frac{v_0^2}{2fg} \tag{4}$$

注意，对必须用到的单位要谨慎：对我们所涉及的距离 D_b，交通工程师是用 ft 来度量的，而速度 v_0则通常用 mi/h 来度量。在作任何计算之前，读者应将 mi 转换成 ft.

我们将计算一下黄灯状态

$$A = \frac{D_b + I + L}{v_0} + T$$

其中 T 是驾驶员的反应时间。于是

$$A = \frac{v_0}{2fg} + \frac{I + L}{v_0} + T.$$

如果把 A 关于 v_0的图像描绘出来，则如图10.2所示。

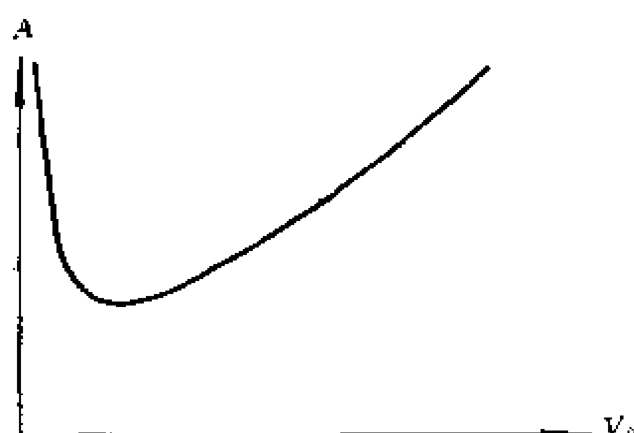


图 10.2 黄灯周期与法定速度的关系

假设 $T=1s$，$L=15ft$，$I=30ft$. 另外，我们将接受公路工程师提出的具有代表性的 $f=0.2$（参看练习1）当 $v_0=30$，40以及50mi/h时，黄灯时间如表1所示。表中同时也给出了经验法的值。

表 1

v_0(mi/h)	A	经验法
30	5.46s	3s
40	6.35s	4s
50	7.34s	5s

我们注意到，经验法的结果一律比我们预测的黄灯状态短些。这使人想起，许多交叉路口的设计很可能使车辆在红绿灯转为红灯时正处于交叉路口上。

即使给了充分的停车时间，仍有许多汽车司机企图加速想抢在红灯亮之前冲过十字路口。这当中的大多数驾驶员不知道（有些人甚至不予注意）什么时候红绿灯转红。有一种"倒数"型的红绿灯可以部分地解决这个问题，在黄灯亮的最后几秒钟内，黄灯上显示出一串倒着数的数字，它们准确地向驾驶员警告红绿灯何时将变色。这种系统几年前就在休斯顿试用了，它成功地降低了事故发生

率。参看练习6.

练　习

1. 一辆正在干燥、水平的路面行驶的汽车开始刹车，刹车时的车速为40mi/h. 汽车在停车前行驶了270ft. 计算摩擦系数。

2. 假设在一个交叉路口，所有车辆都是由东驶上一个1ft/100ft 的斜坡（参看图10.3）. 计算这种情况下的刹车距离。
提示：垂直方向上力的减小，由于重力出现了一个附加的停车力。如果车辆由西驶来，距离是多少?

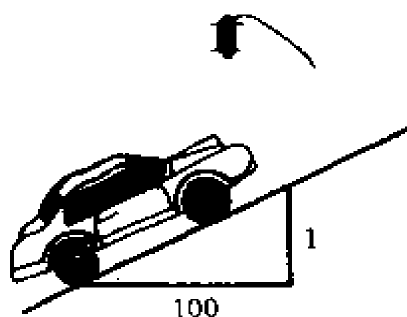


图 10.3

3. 如果轮胎和制动器比较好，f 的实际值可达0.4. 就 f 的这个值，作一张当 $v_0=30$，40以及50mi/h 时的黄灯周期表。这些值比起表1中的值来是不很稳健的。把较稳健的模型与不太稳健的模型作比较，评论停车信号灯的理想设计。

4. 实际中，并不是所有司机都以同样的速度 v_0 驶近交叉路口。假设驾驶员驶近路口的速度介于 $v_0-(\Delta v/2)$ 与 $v_0+\Delta v/2)$ 之间，概率同等。在这基础上计算平均黄灯周期。提示：

$$A=\frac{1}{\Delta v}\int_{v_0-\frac{\Delta v}{2}}^{v_0+\frac{\Delta v}{2}}A(v_0)\mathrm{d}v_0.$$

为什么?

5. 对于 $v_0=40$mi/h 时，欲使经验法的结果完全正确，摩擦系数 f 的值应是多少? 对 f 的这个值作一张类似于表1的黄灯周期表。

6. 你能想出其它的减少交叉路口上事故的方法吗?

参 考 文 献

[1] D. R. Drew, *Traffir Flow—Theory and Control*. New York: McGraw-Hill. 1968.

教 师 参 考

目的 应用初等积分计算汽车的停车距离。讨论停车距离与黄灯周期的关系。

预备知识 有关初等力学、摩擦力、以及微积分的知识。

时间 这部分内容可用一次课讲完。

第 11 章

利用流量理论研究交通管理色灯处的车队长度

Donald A. Drew *

1. 问题：一个简单模型

让我们来考虑下面的设计问题。假设有一条公路，在正常通行

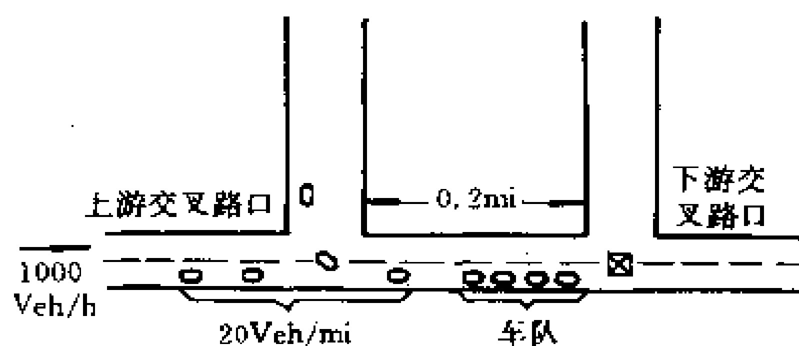


图 11.1 交通叉路口示意图

* Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12181.

的情况下，交通流 q 为1 000辆/h，流量密度 k 为20辆/mi. 在这条路上有两个交叉路口，相距0.2mi. 现在，要在其中的一个路口上架设一个红绿灯。我们关心的主要问题是，在下游红绿灯处形成的车队是否会阻塞上游路口（参看图11.1）。显然，如果下游的车队与上游路口的通行冲突，那么就必须作其它考虑，或许要在上游路口处安装一个同步的红绿灯。

建模者首先要做的事就是弄清这个问题，并且有理由确信已经有了足够的信息去求解。如果问题的叙述不清楚，或所需的信息明显缺少，建模者就应找问题的提出者（多半是公路工程师）了解另外的信息或弄清问题，当带着这个交通问题考虑我们的设计时，我们得到一个重要信息，交通灯在一个3min 的周期内要亮2min 绿灯。（我们已经假定上游交叉路口处发生的事情是无关紧要的。）

现在，我们试用一个简化的模型来回答这个问题。（所谓简化的模型，是指模型中忽略了许多实际情况，同时希望得到一个定量的估计，这种估计对问题提出者是很有用的，它也将帮助我们检验来自更好的模型的估计。）假定以车辆到达下游交叉路口的频率将它们加到车队中去。因为车流量为1 000veh/h，所以一分钟内将有 $16\frac{2}{3}$veh 车到达交叉路口*。如果亮的是红灯，那么，在这一分钟内这些车辆就排成队。最后车队中必有 $16\frac{2}{3}$veh 车。如果知道排队模型中每一辆车所占的距离，就能计算出车队的长度。我们的问题提出者给了我们一个与此略有不同的数字，拥挤密度 $k_j=257$ veh/mi. 上述情况并不罕见，因为通常我们需要的准确信息都是从

---

* 因为一辆汽车要么在车队内要么不在，现在，我们应该说明车队拥有 $16\frac{2}{3}$veh 汽车意味着什么。如果我们来到一个红绿灯处，记录下与问题有关的数据，我们会发现，在六次随机选取的红绿灯周期期间，所记录的车队长为16，17，17，16，18，以及16veh。这些观察结果的平均值为 $16\frac{2}{3}$. 所以我们预测拥有 $16\frac{2}{3}$veh 汽车的车队长度是一个平均长度。

其它数据中提取出来的。通常，它们并不像这个模型中的数据那样容易用于计算。例如，在一个流体力学问题中，我们可能需要知道压力值。而问题提出者可能会提醒我们在某本有关流量记录表的书中会有这些数据。

在我们的问题中，把257veh/mi 转换成$1/257 \approx 0.00389$ mi/veh，这样，$16\frac{2}{3}$veh 汽车占了0.065mi，远远到不了0.2mi（两个交叉路口的间距）。基于这一事实，我们告诉问题的提出者，一个交叉路口上的交通灯不可能影响到另一个交叉路口。要注意，我们还没有用到车流流动密度这一信息。

过些日子，问题提出者告诉我们交通灯已经安装好了，并且据他的观察，当车流量是1 000veh/h 时，大多数情况下车队远远长于$16\frac{2}{3}$veh。他还发现，车队的长度依赖于车流密度。当密度达到约175veh/mi 时，车队就相当长了，而且确实要与上游交叉路口发生冲突。

2. 一个更好的模型

在最初的分析中，我们忽略了一个事实，这就是，当有车辆加入车队时，车队尾部将向后移动。实质上，我们假设在公路上排成队的汽车间不占距离。当车辆加入到车队时，车队尾部就向上游移动，因此，事实上，交叉路口处的交通比公路上任何一点处的交通流都快得多。

从建模的观点来看，我们作了一个简化，导致了不幸的结果（即它给出了一个可能使问题提出者不愉快的错误答案。）现在，让我们考虑一个更详细的分析，这个分析将研究车队尾部向上游的运动。

设U是车队尾部向后移动的速度，那么，车队增加的速度可

以用两种方法表示。第一种方法，速度为 Uk_j. 为说明这一点，考察在时间 t 和 $t+\Delta t$ 之间加入到车队中的车辆数(参看图11.2)。车队增加的长度为 $U\Delta t$，则车队增加的车辆数为 $k_jU\Delta t$. 于是，车辆增加的速度就是 Uk_j.

车队增加的速度亦可表示成

$$q+Uk. \tag{1}$$

为了说明这点，考虑在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻流入的车辆。

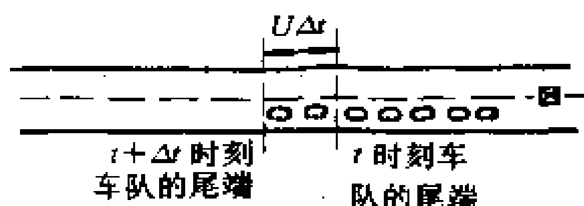


图 11.2 车辆加入车队的速度

在图11.3(b)中，那些在 t 时刻到 $t+\Delta t$ 时刻之间流经 $t+\Delta t$ 时刻车队尾部位置的车辆被加到了车队中，这个贡献为 $q\Delta t$. 另外，那些处于 t 与 $t+\Delta t$ 时刻车队尾部位置之间的车辆也加入了车队。这个贡献是 $kU\Delta t$. 于是总速度为 $q+kU$.

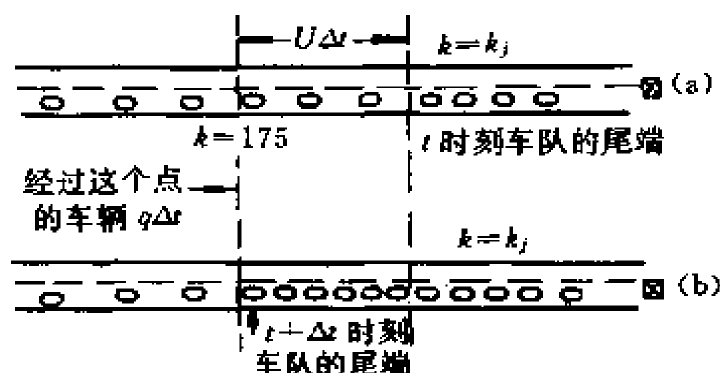


图 11.3 在 t 和 $t+\Delta t$ 时刻的车队

因两种增加速度相等，得

$$U=\frac{q}{k_j-k}. \tag{2}$$

(注意，我们在前面所做的计算正是利用了 $K=0$ 时上述各式的结果)。

假设车队增长一分钟(红灯周期),则其长为

$$U\cdot 1=\frac{q}{k_j-k}\cdot 1, \tag{3}$$

在 $k=175$veh/mi 的较繁忙的运行情况下,这个长度约为0.203mi,于是,我们预料,在这种较繁忙的情况下,两个交叉路口会互相影响。因而,必须提议在上游处架设一个与下游同步的红绿灯,使得上游绿灯放行的车辆到达下游的交叉路口时正赶上绿灯亮,这样它们就可以互相补充。

我们的最终答案是,两个交叉路口将互相影响,这或许使问题的提出者得到满足。然而这种分析仍然是不全面的。如果车队长0.2mi,那么车队仅在红灯期间增长的假设就不合适了。在红灯结束时,领头的汽车开始通过交叉路口,片刻后第二辆车子跟着通过,如此一辆辆地通过交叉路口。问题提出者告诉我们,据观察,启动过程的车流量 q_s 为1 500veh/h 时,密度 k_s 为50veh/mi. 如果启动波的速度为 U_s,那么,同前面的分析一样

$$U_s=\frac{q_s}{k_j-k_s}, \tag{4}$$

其值约为0.12mi/min. 将其与车队尾部约0.2mi/min 的速度相比,我们看到,车队永远不会消散;开始起动的车流太慢,无法赶上车队尾部的排队速度。(参看图11.4)。

练　　习

1. 对同样的红绿灯计算车队的长度,运行情况如下:
   a) $q=500$veh/h 时,$k=20$veh/mi;
   b) $q=500$veh/h 时,$k=200$veh/mi;
   c) $q=1500$veh/h 时,$k=50$veh/mi.
2. 在上面的分析中,我们忽略了红绿灯的反复循环。试描述当红绿灯以红灯一分钟,绿灯二分钟的周期交替地亮时,所造成的车队的增长。利用下面这些数值:$q=1\ 000$veh/h 时,$k=175$veh/mi,$k_j=257$veh/mi 时,$q_s=1\ 500$veh/h 时以

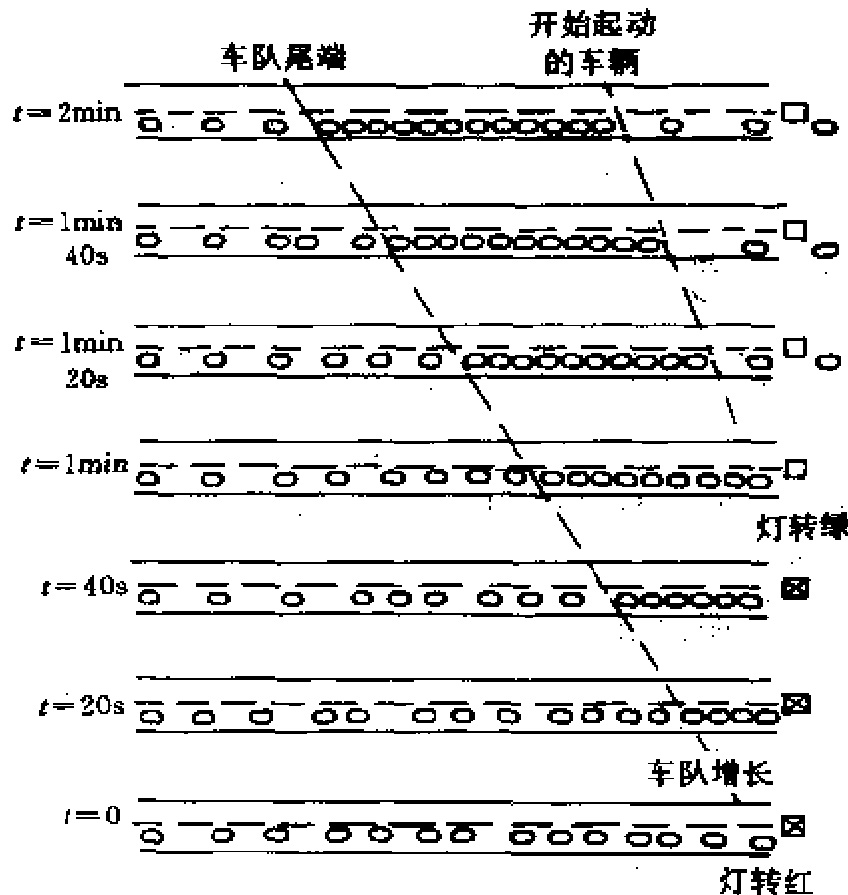


图 11.4　带起动波的车队发展

及 k_j=150veh/mi.

3. 假设我们能够调整上游的密度和流量，使其服从 Greenshields 关系式 $q=u_f k(1-k/k_j)$，其中 u_f 为自由流动的流速，取值50mi/h. 求 k 的值使得 $U=U_s$，即启动的车流与车队的增长速度相同。

参 考 文 献

The interested reader can find many approaches to queueing in the literature. The references below are listed in order of increasing difficulty.

[1] F. A. Haight, *Mathematical Theories of Traffic Flow*. New York: Academic, 1963.

[2] D. R. Drew, *Traffic Flow—Theory and Control*. New York: McGraw-Hill,

1968.

[3] D. C. Gazis *Traffic Science*. New York: Wiley-Intersci-ence, 1974, ch. 2.

[4] D. L. Gerlough and M. J. Huber, "Traffic flow theory — Amonograph," Special Rep. 165, Traffic Res. Board, ***National Research Council***, Washington, DC 1975, ch. 8.

教 师 参 考

目的 通过对车队增加速度的讨论阐述了基本守恒关系和流量概念。

预备知识 不需要具备微积分知识，但是，学生应能够运用速度概念并能计算密度。

时间 用一个课时讲授完。

第 12 章

顺序汽车模型

Robert L. Baker. Jr. *

1. 引　言

汽车是现代技术社会的普遍特征，尽管它会带来污染、事故和拥挤等问题。在过去的 25 年里发表了大量可归类为"交通问题"的文章。这门科学试图通过建模和收集数据来弄清交通的各种过程以及如何使其现代化、最优化并能控制它们。

本章我们要向读者介绍交通科学的一个分支，叫做顺序汽车理论(CFT)。CFT 就是建立长距离的直线公路上交通比较稠密的单车道(没有超车)的模型。这种情况对城市的驾驶员来说似乎是不现实的，但是，在州际公路系统的较长路段上以及遂道的较短路段上，这种情况确实是经常发生的。CFT 经历了三个相互衔接的阶段：最初的发展(大约是 1953－1961 年)；细致的改进及实验分析(1961－1968 年)；向对车辆进行自动控制发展(1968 年至今)。CFT 与现代技术有着密切关系，所有高速地面运输系统的自动控制的应用研究都要用到了它。

---

* IIT Research Institute, 132 Holiday Court, Annapolis, MD 21401.

对这一章的学习，读者至少要预先掌握微积分、微分方程、以及关于 Laplace 变换的运算微积分这些数学知识。如要进一步阅读某些参考书，还必须具备复变函数理论，特别是与反演积分以及线性系统的稳定性有关的知识。笔者经常讲授一门大学三年级水平的、持续两学期的工程数学，其中包括 Laplace 变换(以及复变函数)；在这期间，学生将有足够的准备来阅读本章。在考虑选择 CFT 的哪些方面时，笔者的主要准则就是，叙述中用到的数学对于那些三年级水平的工科学生来说应是容易接受的，而不只是数学专业的学生才能理解。这种限制使得这里提出的课题都只是开了个头。除了 CFT 所得的结果表现为与经验吻合外，这还是 Laplace 变换理论的一个有趣应用，它不同于在教科书里经常出现的在电子网络和质量——弹簧系统中的问题。

有关 CFT 的许多原始文章都发表在《运筹学杂志》上，该杂志在许多大学的图书馆中都能够找到。在 Drew 的著作([4，p. 330—354])中可以找到关于 CFT 的相当独立的章节。Wilhelm 和 Schmidt 列出了 140 篇详尽的文献目录(见[16])，不过这些文章在没有民用工程专业的学校里很难找到。

为了使某项"控制"实验得以进行，笔者在文章中选入了一些问题供学生作进一步研究。其中大多数问题的求解可以模仿本章中提出的结果或扩展它们。微分方程在特定初始条件下的数值解是非常有价值的，不过这要求学生具有更深的知识，仅能看懂本章是不行的。

2. 实际顺序汽车情况的复杂性:顺序汽车模型的简化

在我们的模型中,所考虑的情况是 n 辆汽车在一条直线上行驶且不允许超车。任何一个驾驶员都知道,实际情况是惊人的复杂,每一辆汽车的行为都受到机械和心理因素的影响。例如,在一条公路上,小汽车的速度可能受到各种因素的限制,如各种信号,发现有交通规则执勤人员,驾驶员想快速行驶、或想作一次悠闲的景色优美的驱车旅行。从机械性能上讲,每一辆汽车都是不同的,有些汽车在高速档处具有较好的加速性。其次,驾驶员们对他们周围发生的情况的了解程度也是不同的:有些驾驶员只知道他们自己的汽车在做什么,有些驾驶员对其前后的几辆汽车的状况都比较清楚,有些驾驶员关心得更多的是车内的乘客而不是驾驶。

显然,我们不能希望把上述所有因素都罗列到一个模型中。要得到一个在数学上容易处理的模型,必须作同质性假设,即假设行车线上的所有驾驶员驾驶的汽车型号相同且处于同样的机械状态;对已出现的情况,所有驾驶员都以同样方式作出反应;等等。并且,我们将通过速度、加速度、相隔距离、数量等对我们的模型进行描述,这些因素在实际问题中是非常普通的,而且比较容易测量。

3. Pipes 模型

Pipes 提出了一个交通模型(见[14])。在这个模型中,所有驾驶员都服从加利福尼亚州车辆行驶规则声明:"欲安全驾驶,一个理想的规则就是,每个 10mi/h(14.67ft/s)的行驶速度须间隔一个车身长的距离(约 15ft)。"这个规则为我们提供了一个有用的时间常数 $T' = 15\text{ft}/(14.67\text{ft/s}) = 1.02\text{s}$,这个值与一秒如此接近,所

以，在下面的计算中我们设 $T^*=1\text{s}$. 我们所以要介绍 Pipes 模型，有以下几个理由：1）从历史上讲，这是第一个顺序汽车模型；2）模型对 Laplace 变换作了实际的应用；3）由于模型作了安全距离的假设，因此，两辆汽车不会发生碰撞，故这是一个需要作改进才能与现实一致的模型。

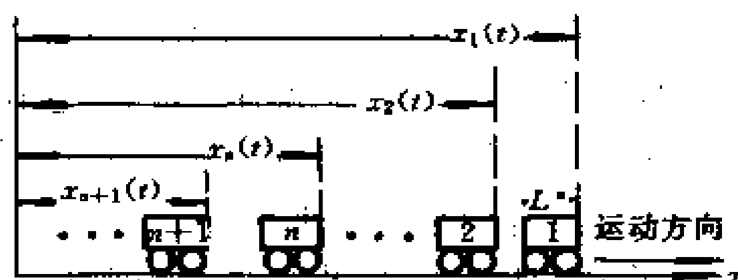


图 12.1 顺序汽车模型的几何示意

假设一条交通线如图 12.1 所示。如果设 $L=15\text{ft}$ 为汽车的长度，b^* 为静止时的法定距离，那么，$x_n(t)$ 和 $x_{n+1}(t)$ 必须满足

$$x_n(t)=x_{n+1}(t)+b^*+\frac{L^*}{14.67}v_{n+1}(t)+L^*, \tag{1}$$

其中 $v_{n+1}(t)$ 为第 $n+1$ 辆汽车的速度。严格地讲，车辆行驶规则将意味着在静止时，即当 $v_{n+1}=0, n=1,2,\cdots$ 时，每辆汽车都触到了前面汽车的保险杆，故 $x_n-x_{n+1}=L^*$. Pipes 对此规则稍许做了点改进，在静止时允许某个附加的间隔 b^*，这样对每个 10mi/h，一个车身长的间隔距离应从前一辆车的尾部保险杆之后 b^* ft 的那一点量起。常数 b^* 的引入并没有使下面的讨论有所不同，在那里我们对(1)式进行了求导。）利用 T^* 的定义并对(1)求关于 t 的导数，得

$$v_n(t)=v_{n+1}(t)+T^*\frac{\mathrm{d}v_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} \tag{2}$$

在作了 $T^*=1\text{s}$ 的假设之后，(2)可写成

$$a_{n+1}(t) \triangleq \frac{\mathrm{d}v_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t} = (v_n(t) - v_{n+1}(t)), \tag{3}$$
$$n = 1,2,\cdots.$$

这是我们遇到的第一个顺序汽车方程。它指出：在任意时刻t，跟在后面的汽车驾驶员(标号$n+1$)调整他的加速度，使其在数值上完全等于他的汽车与紧靠他的前一辆汽车(标号n)之间的相对速度。如果领头的汽车开得较快，那么尾随着的汽车就要加速，反过来也一样。(在下一节的术语中，(3)可以表示成：反应=灵敏度×促进因素，其中促进因素就是相对速度$v_n(t)-v_{n+1}(t)$，灵敏度就是$1/T^*=1\mathrm{s}^{-1}$，无延迟的反应就是加速度$a_{n+1}(t)$。)

现在，我们对方程组(3)求解$v_{n+1}(t)$，在解的过程中，要利用一个对通常的Laplace变换

$$\mathscr{L}\{v(t)\} = \int_0^\infty e^{-st}v(t)\mathrm{d}t \tag{4}$$

稍许改进的结果。这个改进就是定义s乘以Laplace变换为新的量。

$$V(s) = L\{v(t)\} \equiv s\mathscr{L}\{v(t)\}, \tag{5}$$

它被称为乘以s的Laplace变换*。对(3)应用(5)并利用

$$L\left\{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\right\} = s\,V(s) - sv(0) \tag{6}$$

(用$\mathscr{L}\{\mathrm{d}f/\mathrm{d}t\}=s\,\mathscr{L}\{f\}-f(0)$可验证)，我们有

$$(s+1)V_{n+1} = V_n + s\,V_{n+1}(0), \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{7}$$

现在我们来模拟$t=0$时，处于静止状态的汽车长龙等待绿灯的情景，此时

$$v_{n+1}(0) = 0, \quad n = 1,2,3,\cdots. \tag{8}$$

当交通灯改变时($t>0$)，领头汽车的运动是已知，例如$v_1(t)=g(t)$ ($t>0$)，于是$V_1(s)=L\{v_1(t)\}=L\{g(t)\}$为已知。在这种情况下

---

* 在10.2节中列出了一个乘以s的Laplace变换的简表。

$$V_{n+1}(s)=\frac{V_n(s)}{(s+1)},n=1,2,3,\cdots,\tag{9}$$

且经过逐次代换得

$$V_{n+1}(s)=\frac{V_1(s)}{(s+1)^n},n=1,2,3,\cdots.\tag{10}$$

最后这个方程组显示出每一辆汽车车速的 Laplace 变换与已知的第一辆汽车车速的 Laplace 变换的关系。于是，根据第一辆汽车的运动推出的每一辆汽车的速度为

$$V_{n+1}(t)=L^{-1}\{V_{n+1}(s)\}=L^{-1}\left\{\frac{V_1(s)}{(s+1)^n}\right\},n=1,2,3,\cdots.\tag{11}$$

我们将利用卷积定理计算(11)中的逆变换。卷积定理是指，如果 $\varphi_1(s)=L\{f_1(t)\}$，$\varphi_2(s)=L\{f_2(t)\}$，那么

$$L^{-1}\{\varphi_1(s)\varphi_2(s)/s\}=\int_0^t f_1(u)f_2(t-u)\mathrm{d}u.\tag{12}$$

如果我们设

$$\varphi_1(s)\triangleq\frac{s}{(s+1)^n},\tag{13}$$

及

$$\varphi_2(s)\triangleq V_1(s)=L\{v_1(t)\},\tag{14}$$

利用 Laplace 变换表中的

$$L^{-1}\{\varphi_1(s)\}=\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-t},\tag{15}$$

可得

$$v_{n+1}(t)=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\exp(1-u)v_1(1-u)\mathrm{d}u.\tag{16}$$

给定一个具体的函数 $v_1(t)=g(t)$，(16)中的积分也许容易求出，但也可能相反。在某些情况下，回到(13)和(14)并重新定义 φ_1 和 φ_2 或许更容易些。

3.1 领头汽车瞬时加速

考虑一个实际上不可能实现的情况：领头汽车在 $t=0$ 时停在哪里，而一旦 $t>0$ 便获得一个不变的行驶速度 v_c，如图 12.2 所示。这个例子的数学结论能够帮助我们讨论后面的一个比较现实的情况。在这种情况下，对于 $0<u\leqslant t, t>0$，有 $v_1(t-u)=v_c$，且由(16)

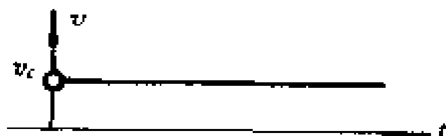


图 12.2 领头汽车瞬时加速

$$v_{n+1}(t)=\frac{v_c}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\exp(-u)\mathrm{d}u. \tag{17}$$

如果我们定义

$$G_n(t)\triangleq\frac{1}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\exp(-u)\mathrm{d}u, \tag{18}$$

不断运用分部积分法，算出(18)中的积分为

$$G_n(t)=1-e^{-t}\left(1+\frac{t}{1!}+\frac{t^2}{2!}+\cdots+\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\right). \tag{19}$$

函数 $G_n(t)$ 具有一些明显的性质：对任意有限正整数 n，$G_n(0)=0$，$G_n(\infty)=1$，而且还可以验证

$$G_n(t)-G_{n+1}(t)=e^{-t}\frac{t^n}{n!}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{n+1}(t). \tag{20}$$

用计算机不难将函数 $G_n(t)$ 列成表，并且可以证明

$$G_1(t)>G_2(t)>G_3(t)>\cdots>G_n(t)>\cdots, 0<t<\infty.$$

图 12.3 显示了最初几个 $G_n(t)$ 的形状，速度

$$v_{n+1}(t)=v_cG_n(t), n=1,2,3,\cdots \tag{21}$$

恰好与这些曲线成比例。

借助于(20)，汽车的加速度为

$$a_{n+1}(t) = \frac{d}{dt}v_{n+1}(t) = v_c \frac{d}{dt}G_n(t) = v_c \frac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}. \tag{22}$$

在 $t>0$ 时，汽车的坐标为

$$x_{n+1}(t) = x_{n+1}(0) + \int_0^t v_{n+1}(u)du = x_{n+1}(0) + v_c\int_0^t G_n(u)du \tag{23}$$

对其中的积分可作数值近似。由图 12.3，显然有

$$\int_0^t G_1(u)du > \int_0^t G_2(u)du > \cdots > \int_0^t G_n(u)du > \cdots \quad (t>0)$$

所以，当汽车最初由假定的距离 b^*+L^* 分开时，$x_i(t)\neq x_j(t)$ $(i\neq j)$，因此，不可能有碰撞。

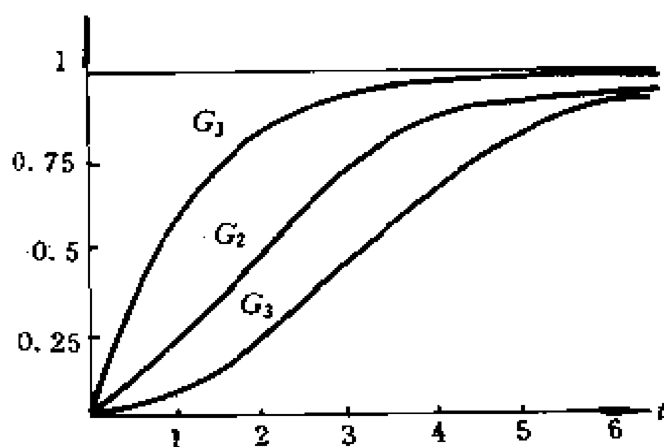


图 12.3 $G_n(t)$

3.2 领头汽车逐渐加速

比较现实的情况是，假设领头汽车从 $v_1(0)=0$ 开始逐渐加速到 v_c，例如

$$v_1(t) = v_c(1-\exp(-t)) \tag{24}$$

参看图 12.4，将(24)代换到(16)中，得

$$v_{n+1}(t) = \frac{v_c}{(n-1)!}\int_0^t u^{n-1}\exp(-u)(1-\exp(t-u))\mathrm{d}u \quad (25)$$

从而

$$v_{n+1}(t) = v_c\left(G_n(t) - e^{-t}\frac{t^n}{n!}\right), \quad (26)$$

于是

$$v_{n+1}(t) = v_c G_{n+1}(t), \quad n = 1,2,3,\cdots. \quad (27)$$

同样，速度与 $G_n(t)$ 曲线成比例。

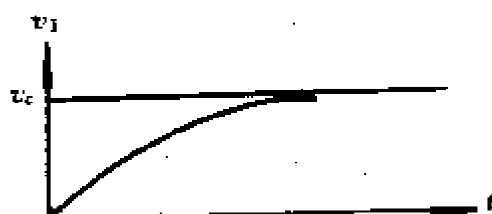


图 12.4　逐渐加速到常定速度

4. 有延迟的线性顺序汽车[11.4]

上一节介绍的简化模型有一个缺点，就是永远不会发生事故。如果领头汽车逐渐加速，那么后面的所有汽车也依次逐渐加速且没有一辆汽车会触到前面汽车的尾部。即使在练习 3 中的极限情况下，即领头汽车一瞬间由 $v_1 = v_c$ 减速到 $v_1 = 0$，所有跟在后面的汽车也能产生足够的减速度以遵守车辆行驶规则直到停车而不会发生碰撞。模型中不合逻辑的地方是：事实上，没有一个驾驶员能够对他观察到的相对速度的差异立即作出反应。

加入精神因素，CFT 的基本假设就是：驾驶员的反应与刺激因素成正比。不过这种反应并不是在刺激一产生就能作出的，而是在延迟一段时间 T 之后，即

$$反应|_{T+t} = 灵敏度 \times 刺激|_t. \qquad (28)$$

例如，一个驾驶员看到一种刺激他减速的情况，那么，在他实际作出刹车前会出现一个时间延迟，而且在制动器踏板的作用完全传到轮子之前会有另一个延迟出现。如果一辆汽车正以60mi/h的速度行驶，那么，在0.5s的时间内，这辆汽车行驶了大约44ft，这个距离在某些意外事故中不能说是无关紧要的。

同(3)相仿，把 T 和 λ 考虑进去，我们的基本数学模型可表述为

$$a_{n+1}(t+T) = \frac{\mathrm{d}v_{n+1}(t+T)}{\mathrm{d}t} = \lambda\,(v_n(t) - v_{n+1}(t))$$

$$n = 1,2,3,\cdots. \qquad (29)$$

其中 T 为驾驶员的反应延迟(假定对汽车长龙中每个司机都一样)，λ 为灵敏度系数。在(28)的精神项中，对第 $(n+1)$ 个驾驶员的刺激就是他在 t 时刻观察到的相对速度 $v_n - v_{n+1}$，而他的反应就是在晚些时刻 $t+T$ 他的加速度 a_{n+1}. 如果假设灵敏度系数为一个绝对的常数，例如是 λ_0，那么，就称(29)为线性顺序汽车模型。在比较复杂的模型中，λ 假设为关于问题的某一特征的函数，如相邻汽车间的距离 $x_n - x_{n+1}$.

现在，我们要借助于 Laplace 变换* 解线性顺序汽车方程组，即带有 $\lambda = \lambda_0$ 的(29)式。我们需要用到结论

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t+T)\right\} = e^{sT}(s \cdot \mathscr{L}\{f\} - f(0))^{**}. \qquad (30)$$

由标准变换表的表列值可以验证这个结果。如果定义

$$V_n(s) \triangleq \mathscr{L}\{v_n(t)\}, \qquad (31)$$

注意这个定义与上一节中 $V_n(s) \triangleq L\{v_n(t)\}$ 稍有不同，那么，对(29)施行变换，得

---

* 现在我们仅使用传统的 Laplace 变换 $\mathscr{L}$，而不用上节中的修改形式 L.

** 这个公式仅当 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t = 0, 0 \leqslant t < T$ 时成立。在下面的应用中正是这种情况。

$$e^{sT}(sV_{n+1}(s) - v_{n+1}(0)) = \lambda_0(V_n(s) - V_{n+1}(s)). \quad (32)$$

经过代数处理，最后这个方程可变成

$$V_{n+1}(s) = \frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s + \lambda_0 e^{-sT}} V_n(s) + \frac{v_{n+1}(0)}{s + \lambda_0 e^{-sT}},$$

$$n = 1, 2, 3, \cdots. \quad (33)$$

如果领头汽车的运动已知，利用方程(33)就可得出汽车长龙中任意一辆汽车的运动情况。作为一个说明，我们重新考虑下述情况：$t=0$ 时车队处于静止，而当 $t>0$ 时领头汽车立即加速到常数 $v_1 = v_c$. 在这种情况下，

$$v_n(0) = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots \quad (34)$$

及

$$V_1(s) = \frac{v_c}{s}. \quad (35)$$

将(34)和(35)代换到(33)中，然后，利用逐次代换，得

$$V_{n+1}(s) = \left(\frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s + \lambda_0 e^{-sT}}\right)^n \frac{v_c}{s}. \quad (36)$$

对任意的 n，通过(36)的逆变换来求 $v_{n+1} = \mathscr{L}^{-1}\{V_{n+1}(s)\}$ 既困难又复杂，所以，我们将首先考虑 $n=1$ 的情况，这时

$$\frac{V_2(s)}{v_c} = \frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s + \lambda_0 e^{-sT}}\left(\frac{1}{s}\right). \quad (37)$$

为了求(37)的逆变换，我们要利用标准位移定理

$$\mathscr{L}\{f(t-a)h(t-a)\} = e^{-as}\mathscr{L}\{f(t)\}, \quad (38)$$

其中

$$h(t-a) = \begin{cases} 0, & t - a < 0, \\ 1, & t - a > 0 \end{cases}$$

是 Heaviside 函数，且有级数展开式

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots + \cdots, \quad |x| < 1.$$

$$(39)$$

首先，把(37)重新写成下面的形式

$$\frac{V_2(s)}{v_c}=\frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s^2}\left(\frac{1}{1+\frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s}}\right), \tag{40}$$

然后，利用(39)并假设 s 足够大，使得 $|\lambda_0 e^{-sT}/s|<1$，求得

$$\frac{V_2}{v_c}=\frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s^2}\left(1-\frac{\lambda_0 e^{-sT}}{s}+\frac{\lambda_0^2 e^{-2sT}}{s^2}-\frac{\lambda_0^3 e^{-3sT}}{s^3}+\cdots\right). \tag{41}$$

现在，利用(38)及 $\mathscr{L}^{-1}\{1/s^n\}=t^{n-1}/(n-1)!$ 这一事实，对每一项分别求逆变换，得到

$$\frac{v_2(t)}{v_c}=\lambda_0(t-T)h(t-T)-\frac{\lambda_0^2}{2!}(t-2T)^2h(t-2T)$$
$$+\frac{\lambda_0^3}{3!}(t-3T)^3h(t-3T)-\cdots. \tag{42}$$

或写成更紧凑的形式

$$\frac{v_2(t)}{v_c}=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\lambda_0^k}{k!}(t-kT)^k h(t-kT). \tag{43}$$

也可以用下面这种不太令人生畏的形式表示(42)和(43)

$$\frac{v_2(t)}{v_c}=\begin{cases}0, & 0<t<T\\ \lambda_0(t-T), & T<t<2T\\ \lambda_0(t-T)-\frac{\lambda_0^2}{2!}(t-2T)^2, & 2T<t<3T\\ \vdots\end{cases} \tag{44}$$

通过对(42)～(44)微分可得到加速度 $a_2(t)$，而走过的距离则由积分得到，即

$$x_2(t)=x_2(0)+\int_0^t v_2(u)\mathrm{d}u. \tag{45}$$

在练习中，给出了求 $v_3(t)$ 的提示；相继的每一个 $v_{n+1}(t)$ 都可分别用同样的基本技巧算出。

我们用 Drew 给出的一个例子(见[4])来结束这节，这个例子说明了刚刚得到的解。一排汽车在红灯亮的时候排成队，2s 后灯

转为绿色(这个时候可取作 $t=0$),领头汽车立即达到一个 40ft/s 的速度。反应时间 $T=1s$,$\lambda_0=1/T=1s^{-1}$,故 $\lambda_0 T=1$(这种状态属渐近不稳定的,我们将在第 6 节中给予讨论)。为了定义什么叫发生碰撞,可以忽略汽车长度,因此对于某个 n,如果 $x_n(t)=x_{n+1}(t)$,就发生一次碰撞。图 12.5 说明了在距离停车线约 130ft 处,第 3 辆汽车与第 4 辆汽车发生了一次碰撞。

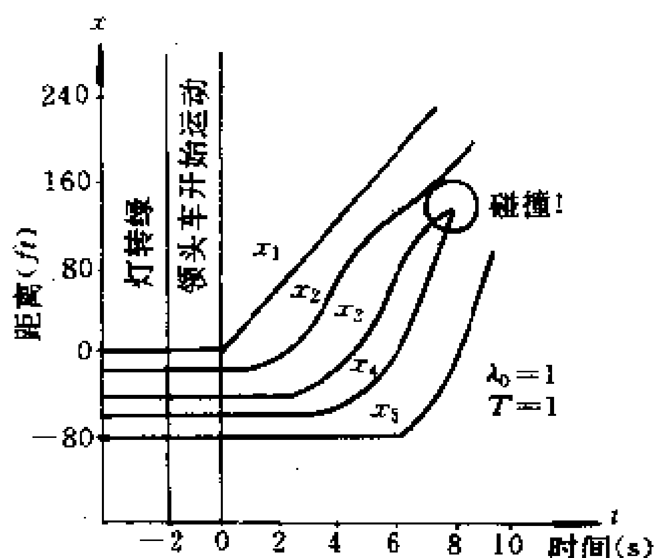


图 12.5 当第一辆汽车瞬时加速到 40ft/s 时,在线性顺序汽车情况下,前五辆汽车的运动

5. 将 Pipes 模型并入线性顺序汽车

在线性顺序汽车模型的讨论中,Chandler 等也研究了加利福尼亚州车辆行驶规则(见[3]),他们从变形后的(1)式

$$x_n(t)-x_{n+1}(t)-b^*-L^*-T^*v_{n+1}(t)=0 \qquad (46)$$

开始,并且作为反应延迟的结果,假设领头车的行为波动将导致(46)不成立。如果定义

$$\delta_{n+1}(t) \triangleq x_n(t) - x_{n+1}(t) - b^* - L^* - T^* v_{n+1}(t), \quad (47)$$

且 $\delta_{n+1}(t)>0$，那么，为了恢复(46)中的等式，第 $n+1$ 辆汽车的驾驶员应加速；如果 $\delta_{n+1}(t)<0$，则他应该减速。故对于灵敏度为 λ_0，在晚些时刻 $t+T$ 作出加速 a_{n+1}反应的第 $n+1$ 个驾驶员来说，$\delta_{n+1}(t)$可以看作是一个刺激。这样，模型的方程就是

$$a_{n+1}(t+T) = \lambda_0(x_n(t) - x_{n+1}(t) - b^* - L^* - T^* v_{n+1}(t)). \quad (48)$$

6. 线性顺序汽车理论的稳定性

归根结底，一个数学模型胜过其它数学模型，取决于这些模型如何对实际现象进行描述。在实际的顺序汽车情况中，一个极其重要的事情就是两辆车发生碰撞。

一个与之有关的数学课题就是线性顺序汽车方程组(29)的稳定性问题。在稳定性研究中，通常要问的问题是"给系统一个干扰，其反应是什么？"如果反应衰减，则认为系统是稳定的；如果反应是单纯振荡或被放大，则认为系统是不稳定的。不幸的是，关于线性顺序汽车稳定性分析的数学讨论冗长而乏味，因此，我们把它放到附录 3 中，这里只是概括地给出各种结果。

在顺序汽车问题中，"局部稳定性"是问"当 t 很大时，跟在后面的汽车对领头汽车的一个机动动作的反应是怎样的？"具体地说，假设 $t=0$ 之前，所有的汽车以相同的速度 u 行驶；然后，第一辆汽车在 $0<t<\bar{t}$ 期间，以某种连续的方式加速和减速，在 $t>\bar{t}$ 期间回到他的初始速度 u。如果任一跟在后面的驾驶员必须以越来越大的幅度交替地加速和减速，那么，随着 t 值的越来越大，他们的运动将是反复无常的而且肯定是不稳定的。

不管是以 $a_{n+1}(t)$，$v_{n+1}(t)$，或 $x_n(t)-x_{n+1}(t)$三种反应中的哪一种来表示(其中 a_1，u_1 和 x_1 对应着领头车)，稳定性结果是

(i) 对于 $\lambda_0 T \leqslant 1/e$（稳定的）——所有跟随者（$n+1=2,3,4,\cdots$）都表现出非振荡的、阻尼的反应。

(ii) 对于 $1/e < \lambda_0 T < \pi/2$（稳定的）——第二辆汽车的反应是振荡、阻尼的；其余汽车（$n+1=3,4,\cdots$）的反应是振荡的，其振幅最初增加但最终是减小的。

(iii) 对于 $\lambda_0 T = \pi/2$（不稳定的）——第二辆汽车（$n+1=2$）的反应是单纯振荡的，其余汽车（$n+1=3,4,\cdots$）的反应都是振荡的且振幅不断增加；

(iv) 对于 $\lambda_0 T > \pi/2$（不稳定的）——所有跟随者（$n+1=2,3,\cdots$）的反应都是振荡的且振幅不断增加。

上述结论的进一步解释请看图 12.6。

发生碰撞与稳定性是不同的问题。可以确认，如果 $\lambda_0 T \leqslant 1/e$ 且初始间距大于 u/λ_0，那么，在线性顺序汽车控制下，以速度 u 行驶的一队车辆是安全的，不会由于已说过的领头汽车的加速——减速而发生碰撞。不过，只有在非振荡情况下才可以肯定行车的安全性，因为，一种振荡——即使最终是减幅的——也可能引起一场碰撞。一般地，为了讨论发生碰撞的可能性，需要更具体的有关车辆之间的初始距离和领头汽车所作的机动动作的信息。不过，一般地可以说，对长时间行驶的一队车辆，$\lambda_0 T \leqslant 1/e$ 表示最安全的反应，$\lambda_0 T > \pi/2$ 表示最危险的跟随情况。

“渐近稳定性”涉及的是一个长车队，它是问“当前面汽车行动中的波动向整个车队蔓延时，这个波动何时会增强？”渐近稳定性涉及大量的汽车行为，而局部稳定性关心的是 t 很大时汽车的反应。研究表明，波动的稳定性分界线在 $\lambda_0 T = 1/2$ 处，如果 $\lambda_0 T < 1/2$，波动减弱，如果 $\lambda_0 T > 1/2$，波动增强。

这样看来，两种稳定性中的关键因素是反应灵敏度与反应时滞的乘积 $\lambda_0 T$. 可以预料起初可能会有人认为，为了产生一个稳定的反应，灵敏度 λ_0 或许应该较大。但对于具有固定反应时滞 T 的

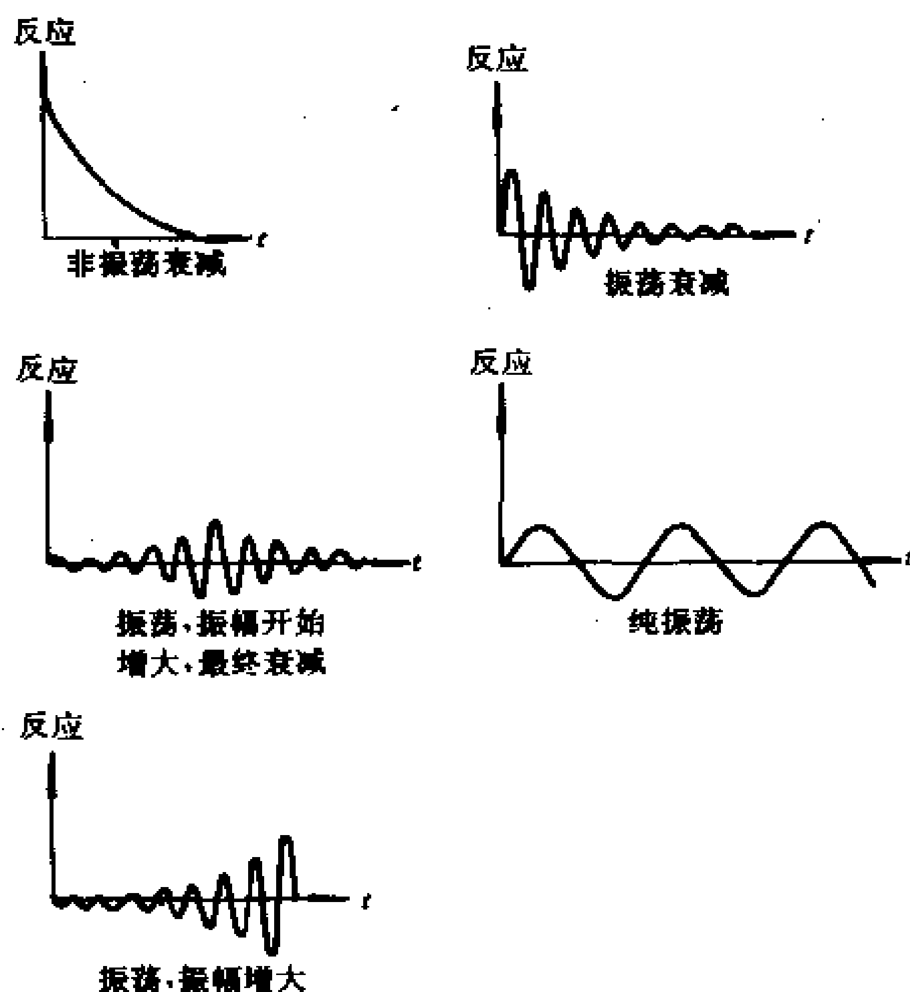


图 12.6　局部稳定性分析中反应的类型

系统，情况就不一定是这样，因为反应不是在作观察的时刻 t 作出的，而是在晚些时刻 $t+T$ 系统已经变化的时候。在不适当的时候作出夸大的反应是有危险的，这样做可能会对相对一个期望目标的小偏差作过度补偿，结果不是减少偏差，而是使偏差变大。可以证明（参看 10.3 节结尾的注释）Pipes 模型既是局部稳定的又是渐近稳定的。

7. 非线性顺序汽车规律

对线性顺序汽车模型的一些改进，修改了前面所作的反应灵敏度 λ 是一个常数且对所有驾驶员都是同样的假设，修改后的模型统称为非线性顺序汽车模型。在这个问题的讨论中，一个有用的定义就是两辆相邻汽车间的间隔 $P_n(t)$

$$P_n(t) \triangleq x_n(t) - x_{n+1}(t). \tag{49}$$

阶跃函数律 设 λ 为阶跃函数：

$$\lambda = \lambda(P_n) = \begin{cases} \alpha, 若\ 0 < P_n \leqslant P^* \\ \beta, 若\ P_n > P^* \end{cases} \quad \alpha, \beta 为常数 \tag{50}$$

按照这个规律，车队中每一辆汽车的灵敏度将是这两种可能情况之一。可以推测，人们将只想研究 $\alpha > \beta$ 的情况，因为如果与前面汽车相距不远，那么，大多数驾驶员要以较强的灵敏度作出反应。在极端情况下，当与前面的汽车很近时，驾驶员的反应是惊慌的，但当离开稍远时，反应就比较难捉摸了，这时 α 可取为 2β 或 3β.

倒数距离规律 设

$$\lambda = \lambda(P_n) = \frac{\alpha}{P_n} = \frac{\alpha_0}{x_n(t) - x_{n+1}(t)}, \tag{51}$$

其中 α_0 是一个常数，称为特征速度。每个驾驶员的反应程度是与他同其它车辆间的距离成反比的。这个规律与前面的任何规律相比都有本质的不同，因为在一队驾驶员中，第一位驾驶员后面的每一个驾驶员现在都可能表现出不同于其他任何人的独特的灵敏度。倒数距离规律特别重要，因为它与实验上和理论上确定的交通流与密度之间的各种关系相一致（参看下一节）

Edie 规律 Edie 提出（见[5]）在稠密度较低的地方，灵敏度与反应时的车速成比例且与间隔距离的平方成反比，于是

$$\lambda = \lambda_0 \frac{\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t+T)}{\mathrm{d}t}}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^2}. \tag{52}$$

Gazis 等曾研究了(52)的更一般形式(见[8])

$$\lambda = \lambda_0 \frac{(\mathrm{d}x_{n+1}(t)/\mathrm{d}t)^m}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^l}, m, l > 0. \tag{53}$$

他们的主要结论是，尽管确实需要用非线性模型而不是线性模型，但是，与经验数据的比较结果并没有显示出任何一个非线性模型有什么明显的优越性。

在一般情况下，研究人员不得不转向用计算机求解非线性模型。当然，Laplace 变换技术将不起作用了，例如，Edie 模型

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_{n+1}(t+T)}{\mathrm{d}t^2} = \lambda_0 \frac{\left(\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t+T)}{\mathrm{d}t}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t}\right)}{(x_n(t) - x_{n+1}(t))^2}. \tag{54}$$

是非线性的，而各种变换技术仅对线性系统有用。

8. 稳 定 状 态 流

在常值灵敏度和倒数间隔灵敏度情况下，作为密度 k(如以 cars/mi 计)的函数，稳态速度 u 和交通流 q(如以 cars/h 计)是不难计算的。在公路上，人们用在一个适当长的时间内，通过某一点的车辆数来度量交通流 q，而用一段适当长的路段上的车辆数来度量密度 k. 为了定义一个稳定状态，我们设想在某个时刻 $t=0$，所有汽车都以某个共同速度 u_0 行驶，然后，领头汽车以某种方式加速或减速到新的速度 u. 由于后面汽车对速度的控制，假定当 t 变得很大时，最终将达到稳定状态。在这种状态下，每辆汽车以所提供的速度 u 行驶，当然，还要假定避免碰撞所必须的所有稳定性条件都得到满足。

首先考虑(29)中 $\lambda=\lambda_0$ 时的常值灵敏度模型。对这个方程，从 $t=0$ 到某个足够大时间 t 进行积分，得

$$u \triangleq v_{n+1}(t+T)=\lambda_0(x_n(t)-x_{n+1}(t))+c_1. \tag{55}$$

因为，间隔和速度已调整为常数，因此，在稳定状态下，时间延迟 T 可忽略不计，从而，可以认为 u 与 $v_{n+1}(t+T)$ 是一致的。现在，稳态间隔 x_n-x_{n+1} 恰好是密度 k 的倒数，而常数 c_1 由条件 $x_n-x_{n+1}=1/k_j$ 时 $u=0$ 所确定，其中 k_j 为拥挤密度(参看附录 10.1 的有关定义)。所以

$$u=\lambda_0\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k_j}\right), \tag{56}$$

且因为 $q=ku$

$$q=\lambda_0\left(1-\frac{k}{k_j}\right). \tag{57}$$

q 关于 k 的实验曲线如图 12.7 所示。从直观上看，在低密度时，驾驶员将不试图“跟上”前面的汽车。所以，不必为(57)与实验结果在流量-密度曲线应经过原点问题上的不一致而感到惊奇。

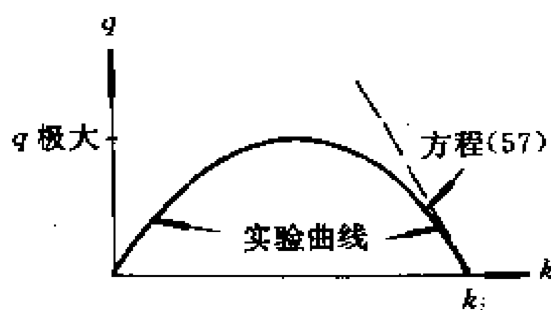


图 12.7 流量与密度关系的图像说明

接下来，我们要处理倒数间隔模型

$$\frac{\mathrm{d}v_{n+1}(t+T)}{\mathrm{d}t}=\frac{\alpha_0}{x_n(t)-x_{n+1}(t)}\left(\frac{\mathrm{d}x_n(t)}{\mathrm{d}t}-\frac{\mathrm{d}x_{n+1}(t)}{\mathrm{d}t}\right). \tag{58}$$

同上，对方程的两端积分，得

$$u \triangleq v_{n+1}(t+T)=\alpha_0\ln(x_n(t)-x_{n+1}(t))+c_2. \tag{59}$$

其中 c_2 由条件：间隔趋于车身有效长度 $l\triangleq 1/k_j$ 时车速趋于零所确定(对 l 的进一步解释请看附录 10.1)。于是 $c_2=-\alpha_0\ln(l)$，由于

稳态密度 k 恰好是间隔 $x_n(t)-x_{n+1}(t)$ 的倒数

$$u=\alpha_0\ln\left(\frac{k_j}{k}\right); \tag{60}$$

而稳态流又由 ku 给出，所以

$$q=\alpha_0 k\ln\left(\frac{k_j}{k}\right). \tag{61}$$

方程(61)确实具有图 12.7 中关于密度的实验流量曲线的一般形状。方程(56)，(57)，(60)及(61)可归结为状态方程，因为它们与热力学中关于压力、温度、浓度等宏观量的状态方程类似。

基于一个完全不同的交通流量模型，Greenberg 导出了下面的方程(见[9])

$$u=c\ln\left(\frac{k_j}{k}\right),\qquad q=ck\ln\left(\frac{k_j}{k}\right), \tag{62}$$

其中 c 是最大流量 $q_{\max}$ 时的速度。如果人们愿意接受 c 与参数 α_0 之间的令人惊讶的等价(其中 c 表示沿某条公路的总流量的特征，而 α_0 是对一个驾驶员如何沿着这条公路驾驶的一种度量)，那么，两种完全不同的处理就导致了同样的状态方程。倒数间隔模型所以比别的一些模型更普及，这种情况起了特殊作用。

在对纽约的三条隧道所进行的试验中，人们对 α_0 和 c 的值作了估计，Herman 和 Potts 在他们的文章中报告了有关的方法及结果。这些结果被作成如下的表格。

	α_0(mi/h)	c(mi/h)
Lincoln 隧道	20	17
Holland 隧道	18	15
Queens-Midtown 隧道	~22	25

这些作者报告了导出 λ 关于 $1/\bar{p}$ 的曲线的一些实验($\bar{p}$=车队上 x_n-x_{n+1} 的平均值)。直线 $\lambda=\alpha_0/\bar{p}$ 的一个最小平方拟合充分描述了有关的数据，α_0 的值就是上面给出的那些。(如果有 k 个由实验

确定的λ值，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$，则$\alpha_0/\bar{p}$的一个最小平方拟合将使距离的平方和$\sum_{j=1}^{k}(\lambda_j-\alpha_0\bar{p})^2$达最小。)

9. 结 论

在这一章中，我们只能对CFT作一些简要的介绍，更复杂的模型不会在概念上遇到困难，但理解这些模型所需要的数学知识通常超出了一般低年级学生所学的范围。Wilhelm和Schmidt(见[16])指出：到1973年为止，至少存在30种顺序车辆模型。我们就本章中的概念介绍一些推广，以促进读者的求知欲：

(1) Tuck推导出一组二维CFT-型模型(见[15])，用来研究船只的护航，并提出了这些模型在鸟类的飞行，军队的行军队形，以及飞机的飞行研究中的可能推广；

(2) Newell研究了(见[13])对于加速和减速具有不同的灵敏度的问题(制动灯亮说明减速，但没有相应的设备说明加速)；

(3) Lee的研究(见[12])包括了一个再现过去行为的记忆函数；

(4) Bexelius(见[1])研究了对n辆汽车的控制。

有许多问题有待于进一步研究。一个潜在的大有可为的领域，就是CFT对各种环境而不仅是公路的应用。像允许超车的双行车道公路这样更复杂的情况，以及在很多模型中数学解与实际在公路上收集到的数据之间仍存在差距等等，都是值得研究的。我们希望经过屡次反馈和对模型的及时修改，行车的安全性将得到改进。

10. 附　　录

10.1 符号表

T^*　　=1s，加利福尼亚车辆行驶规则常数。

L^*　　=15ft，Pipes 模型中车身的长度

b^*　　当局规定的在静止时的法定间距(以 ft 计算)。

$x_n(t)$　　第 n 辆汽车的头部在某个笛卡儿参考系中的坐标(例如以 ft 计算)。

$v_n(t)$　　$=\mathrm{d}x_n(t)/\mathrm{d}t$，第 n 辆汽车的速度(例如以 ft/s 计算)。

$a_n(t)$　　$=\mathrm{d}v_n(t)/\mathrm{d}t=\mathrm{d}^2x_n(t)/\mathrm{d}t^2$，第 n 辆汽车的加速度(例如以 ft/s^2 计算)。

$P_n(t)$　　$=x_n(t)-x_{n+1}(t)$，汽车间隔，从第 $n+1$ 辆车前面的保险杆到第 n 辆车前面的保险杆的距离(例如以 ft 计算)。

$\mathscr{L}\{f(t)\}$　　$=\int_0^\infty e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$，$f(t)$ 的 Laplace 变换。

$L\{f(t)\}$　　$=s\mathscr{L}\{f(t)\}$，s 乘以 $f(t)$的 Laplace 变换。

$V_n(s)$　　$=L\{v_n(t)\}$(第 3 节中)；

　　$=\mathscr{L}\{v_n(t)\}$(第 4 节中)。

λ　　=灵敏度系数；如果 λ 是常数，则用 λ_0 代之。

q　　流量，单位时间内通过公路上某给定点的车数(例如以 cars/h 计算)。

k　　密度，任意时刻单位路段上的车辆数(例如以cars/m 计算)。

k_j　　拥挤密度，即所有车辆不得不停车而挤在一起时单

位路段上的车辆数(例如以 cars/mi 计算)。

c 最佳速度,流量最大时的车速(例如以 mi/h 计算)。

u 稳态速度,一队汽车的公共速度(例如以 mi/h 计算),对于领头汽车的某个初始波动已不再需要调整了。

l 稳定状态理论中车辆的有效长度,通常定义为 $1/k_j$,其中 k_j 通过使给定的状态方程 $q=q(k)$ 适合实验数据来确定。Chandler 等的文章[3]中,$k_j=288\text{veh/mi}$,这意味着 $l=23.1\text{ft}$.

10.2 用到的 Laplace 变换

Pipe 模型	乘 s 的 Laplace 变换
$f(t)$	$\varphi(s)=L\{f(t)\}=s\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$
$U(t)=1$	1
t	$1/s$
$h(t-T)f(t-T)$	$e^{-sT}\varphi(s)$
$G_n t$,见(19)	$1/(s+1)^n$
$\varphi_n(t)\triangleq\dfrac{\mathrm{d}G_n(t)}{\mathrm{d}t}=\dfrac{e^{-t}t^{n-1}}{(n-1)!}$,见(15),(20)	$s/(s+1)^n$
$\int_0^t G_n(u)\mathrm{d}u$	$1/[s(s+1)^n]$
$\begin{cases}t/t_0, & 0\leqslant t\leqslant t_0\\ 1, & t>t_0.\end{cases}$	$(1-e^{-t_0 s})/(t_0 s)$.

线性顺序汽车	Laplace 变换
$f(t)$	$\psi(s)=\mathscr{L}\{f(t)\}=\int_0^{\infty}e^{-st}f(t)\mathrm{d}t$
$\dfrac{\mathrm{d}f(t+T)}{\mathrm{d}t}$	$e^{sT}(s\psi(s)-f(0))$,如果 $\mathrm{d}f(t)/\mathrm{d}t=0,0\leqslant t\leqslant T$
$f(t-T)h(f-T)$ 见(38)	$e^{-sT}\psi(s)$

$$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \qquad 1/s^n.$$

10.3 稳定性的数学理论

(这个讨论是对 Donald Drew 的一些想法的改进)。

在这个附录中,我们要导出线性顺序汽车模型的稳定性结果。第 6 节中综述了

$$\frac{dv_{n+1}(t+T)}{dt}=\lambda_0(v_n(t)-v_{n+1}(t)),n=1,2,\cdots. \quad (A1)$$

首先考虑渐近稳定性。我们想研究当干扰向车队蔓延时,其振幅的情况。设第一辆汽车的速度与 $\cos(\omega t)$ 成比例。我们将设

$$v_1(t)=b_1e^{i\omega t}=b_1(\cos(\omega t)+i\sin(\omega t)) \quad (A2)$$

这是一个复值量。而实际上,我们只对(A2)的实部感兴趣,但是,由于(A1)中的诸方程都是线性的,所以,只要取方程的实值部分,我们就可以得到计算中感兴趣的任一点处的实值量。如果假设(A1)的解具有形式

$$v_n(t)=b_ne^{i\omega t} \quad (A3)$$

它们服从(A1)给出的领头汽车的运动,那么

$$b_{n+1}(i\omega\, e^{i\omega T}+\lambda_0)=\lambda_0b_n,\quad n=1,2,3,\cdots \quad (A4)$$

且经过逐次代换

$$b_{n+1}=\frac{b_1}{\left(1+\frac{i\omega\, e^{i\omega T}}{\lambda_0}\right)^n} \quad (A5)$$

于是,渐近稳定或不稳定问题就成为 $|1+(i\omega\, e^{i\omega T}/\lambda_0)|$ 大于 1(稳定的)或小于 1(不稳定的)的问题。因为

$$\left|1+\frac{i\omega\, e^{i\omega T}}{\lambda}\right|^2=\left|\left(1-\frac{\omega}{\lambda_0}\sin(\omega T)\right)+i\frac{\omega}{\lambda_0}\cos(\omega T)\right|^2 \quad (A6)$$

$$\left|1+\frac{i\omega}{\lambda_0}e^{i\omega T}\right|^2=1-\frac{2\omega}{\lambda_0}\sin(\omega T)+\frac{\omega^2}{\lambda_0^2} \quad (A7)$$

所以，当 $(\omega^2/\lambda_0^2) < (2\omega/\lambda_0)\sin(\omega T)$ 时

$$\left|1+\frac{i\omega}{\lambda_0}e^{i\omega T}\right|<1. \tag{A8}$$

如果 $\omega/\lambda_0 > 0$，那么(A8)成为

$$\frac{\omega}{\lambda_0} < 2\sin(\omega T). \tag{A9}$$

如果 $\omega/\lambda_0 < 0$，(A8)成为

$$\frac{\omega}{\lambda_0} > 2\sin(\omega T). \tag{A10}$$

图 12.8 和 12.9 给出了 $y_1=\omega/\lambda_0$ 和 $y_2=2\sin(\omega t)$ 关于 ω 的图形。在图 12.8 中，对$(0,\omega_1)$或$(\omega_2,0)$中的 ω 的值，干扰将随 n 增长。在图 12.9 中，对任何 ω 的值，都不会导致干扰增长。

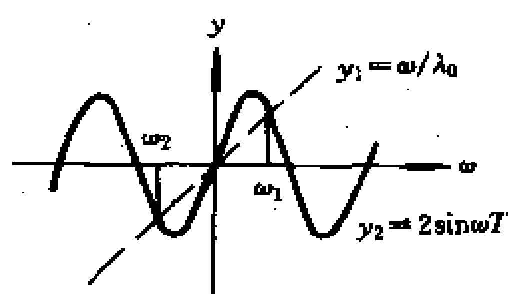


图 12.8 不稳定情况

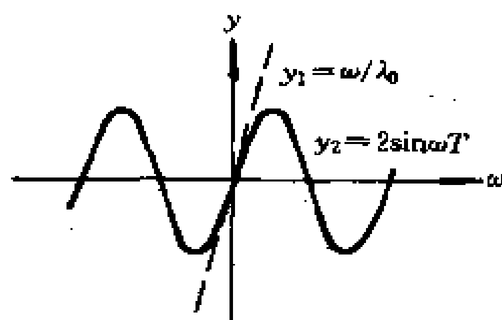


图 12.9 稳定情况

区分稳定与不稳定情况的依据是直线 $y_1=\omega/\lambda$ 与曲线 $y_2=2\sin\omega T$ 在原点处是否相切。我们算出在原点处的斜率 $\left.\frac{dy_1}{d\omega}\right|_{\omega=0}=1/\lambda_0$ 和 $\left.\frac{dy_2}{d\omega}\right|_{\omega=0}=2T$。这样，如果 $1/\lambda_0>2T$ 或 $\lambda_0 T<1/2$，那么，模型对各种频率的干扰都是渐近稳定的。而对于 $\lambda_0 T>1/2$，模型是渐近不稳定的。

现在，让我们只考虑第二辆汽车的局部稳定性问题，其运动方程是

$$\frac{dv_2(t+T)}{dt}+\lambda_0 v_2(t)=\lambda_0 v_1(t).\tag{A11}$$

(A11)的通解是齐次解加上一个特解。假设 $v_1(t)$是已知的，另外还存在并已求得一个稳定的特解 $v_2^s(t)$．因为 $v_2(t)=v_2^s(t)+v_2^h(t)$，其中 v_2^h 是齐次解，故可将它看成是对特解的一个干扰。在局部稳定性理论中提出这个干扰是随时间增长还是减弱的问题。显然 $v_2^h(t)$ 满足

$$\frac{dv_2^h(t+T)}{dt}+\lambda_0 v_2^h(t)=0.\tag{A12}$$

我们推测

$$v_2^h(t)=e^{\mu t},\tag{A13}$$

并代换到(A12)中，得特征方程

$$\mu e^{\mu T}+\lambda_0=0.\tag{A14}$$

如果让 $\mu T=\sigma$ 及 $\tau=\lambda_0 T$，我们有超越方程

$$\sigma e^{\sigma}+\tau=0,\tag{A15}$$

对 $\sigma=\sigma(\tau)$进行分析是相当困难的。

我们先来寻找取实值的 σ，将其写成

$$\sigma=-\tau e^{-\sigma}.\tag{A16}$$

图 12.10 中对 $y_1=\sigma$ 和 $y_2=-\tau e^{-\sigma}$ 的图示表明：

(i) 如果 $\tau>\tau_1$，则 σ 的值都不满足(A16)；

(ii) 如果 $\tau=\tau_1$，σ 有一个值满足(A16)(这就是图 12.10 所示的情况)；

(iii) 如果 $0<\tau<\tau_1$，σ 有两个值满足(A16)。

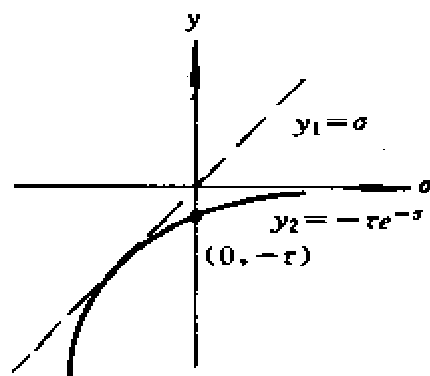


图 12.10　方程(A16)的解

我们来计算一下 τ_1. $y_1=\sigma$ 是 $y_2=\tau_1 e^{-\sigma}$ 的切线，就是

$$\frac{dy_1}{d\sigma} = \frac{dy_2}{d\sigma} \quad \text{或} \quad 1 = \tau_1 e^{-\sigma} \tag{A17}$$

以及

$$y_1 = y_2 \text{ 或 } \sigma = -\tau_1 e^{-\sigma} \tag{A18}$$

于是 $\sigma = -1, \tau_1 = 1/e$. 这样，对于 $0 < \tau = \lambda_0 T < 1/e$，存在两个负实值 σ 满足(A16)，从而(A13)的解具有指数衰减特性。对于 $\lambda_0 T = 1/e$，(A13)存在一个指数衰减的解。

现在，让我们来考虑 σ 的复数值。置 $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$，于是(A15)成为

$$(\sigma_r + i\sigma_i)e^{\sigma_r}(\cos\sigma_i + i\sin\sigma_i) + \tau = 0. \tag{A19}$$

分别令实部和虚部等于零，得

$$\sigma_r e^{\sigma_r}\cos\sigma_i - \sigma_i e^{\sigma_r}\sin\sigma_i + \tau = 0, \tag{A20}$$

$$\sigma_i e^{\sigma_r}\cos\sigma_i + \sigma_r e^{\sigma_r}\sin\sigma_i = 0. \tag{A21}$$

将(A21)代换到(A20)中，得

$$\frac{\sigma_r}{\cos\sigma_i} + \tau e^{-\sigma_r} = 0. \tag{A22}$$

而(A21)可重新写成

$$\frac{-\sigma_r}{\cos\sigma_i} = \frac{\sigma_i}{\sin\sigma_i}, \tag{A23}$$

见图 12.11，为了分析(A22)和(A23)，我们在图 12.12 和 12.13 中绘出了

$$y_1(\sigma_i) = \frac{-\sigma_r}{\cos\sigma_i} = \frac{\sigma_i}{\sin\sigma_i} \tag{A24}$$

和

$$y_2(\sigma_i) = \tau e^{-\sigma_r} = \tau\exp\left(\frac{\sigma_i\cos\sigma_i}{\sin\sigma_i}\right), \tag{A25}$$

的图形并寻求两个图形的交点。

让我们先考虑 $\tau e < 1$. 图 12.14 没有明确表示出我们以前找出的那两个实根。但它表示了在 $\sigma = \pm 2\pi k, k = 1,2,3,\cdots$ 附近的一

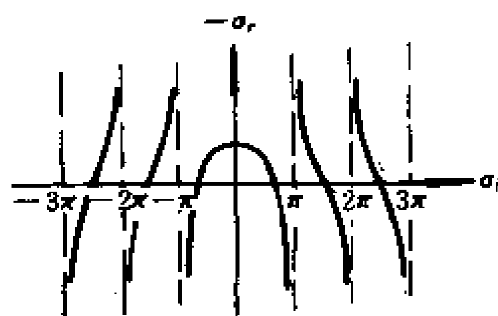


图 12.11　方程(A23)

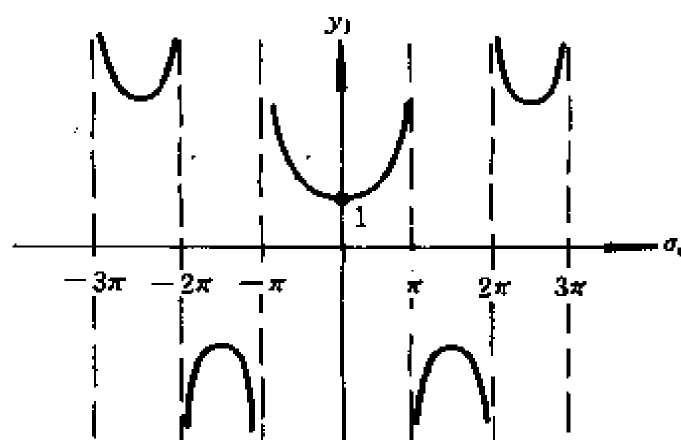


图 12.12　方程(A24)

系列根(图中示出了两个根)。由于这两个根在$\pm 2\pi$附近,σ_r是一个模很大的负数(参看图 12.11)。对应于这些根的解,尽管它们是振荡的但衰减得很快。因此,如果将它们迭加到任何指数衰减的解上,短时间后它们便没有什么实际意义了。

现在,我们考虑$\tau e>1$的情况。根据前面的分析,不存在使解指数地衰减的实根,在$-\pi<\sigma_i<\pi$之间存在两个复根。由于$\sigma_i\neq 0$,这些根对应于振荡型的解。要观察这些解是否随时间而增长,我们必须对σ_r进行考察。如果τ使得$|\sigma_i|<\pi/2$,$\sigma_r<0$,则解衰减。如果τ使得$|\sigma_i|>\pi/2$,则两个解都是增长的。让我们来求τ_2,使得$\sigma_i=$

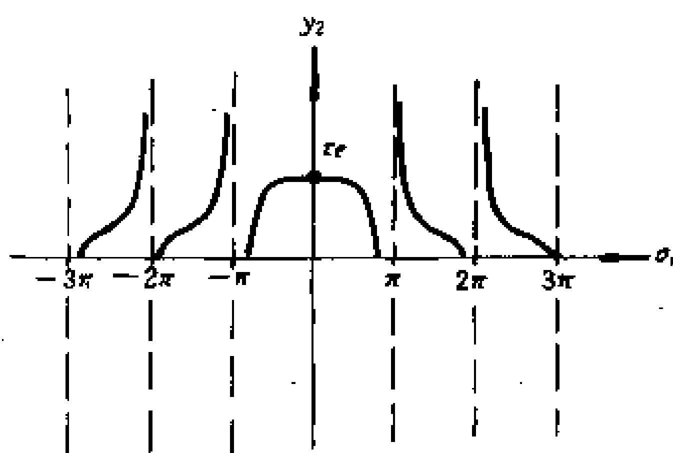


图 12.13　方程(A25)

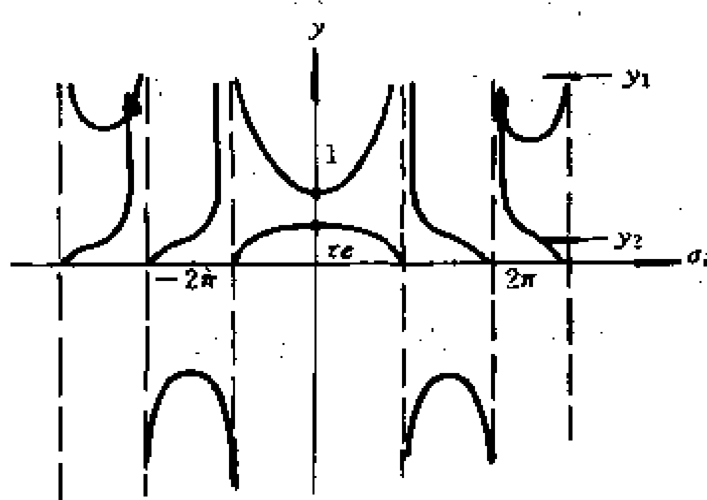


图 12.14　对于 $\tau e<1$ 的方程(A24)和(A25)

$\pi/2$ 是(A20)和(A21)的解。由(A21)，得 $\sigma_r=0$，而由(A20)，$\tau_2=\pi/2$ 参看图 12.15.

让我们来总结一下我们的结论。如果

(i) $0<\tau=\lambda_0 T\leqslant 1/e$，(A12)的解将是衰减的，稍有一点振荡；

(ii) $1/e<\tau=\lambda_0 T<\pi/2$，(A12)的解作振幅衰减的振荡；

(iii) $\tau=\lambda_0 T>\pi/2$，(A12)的解作振幅增加的振荡。

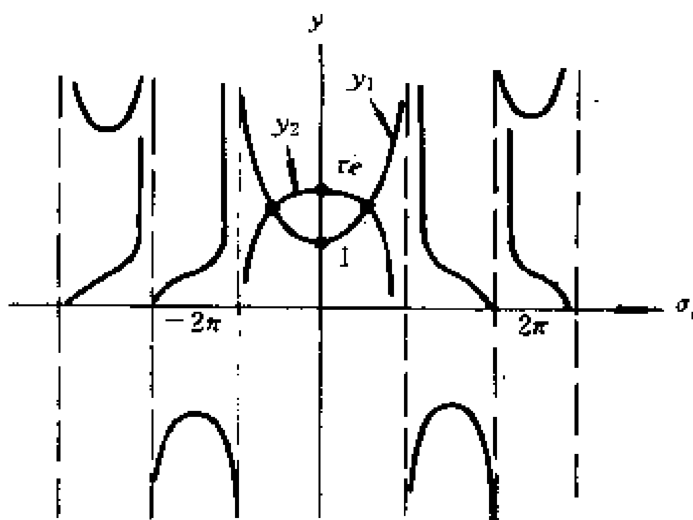


图 12.15 对于 $\tau e>1$ 的方程(A24)和(A25)

因此，第二辆汽车的运动当 $\tau=\lambda_0 T<\pi/2$ 时是局部稳定的，而当 $\lambda_0 T\leqslant 1/e$ 时稳定性最强。

附带说一下，在(A7)和(A14)中令 $T=0$ 及 $\lambda_0=1$，我们就会看到，没有时滞($T=0$)和灵敏度 $\lambda_0=1/T^*=1$ 的顺序汽车模型——Pipes 模型既是渐近稳定的又是局部稳定的。

练　　习

Pipes 模型

1. 设领头汽车在 $t=0$ 到 $t=t_0$ 内以不变的加速度行驶，然后保持匀速。求在这种情况下的速度 $v_{n+1}(t)$，$n=1,2,3,\cdots$. 试求 $v_{n+1}(t)$ 的某种直观图形

$$v_1(t)=\begin{cases} v_c[t/t_0], v\leqslant t\leqslant t_0 \\ v_c, \quad t>t_0. \end{cases}$$

解：

$$v_{n+1}(t)=\begin{cases} \dfrac{v_c}{t_0}\displaystyle\int_0^t G_n(u)\mathrm{d}u, 0<t<t_0 \\ \dfrac{v_c}{t_0}\left[\displaystyle\int_0^t G_n(u)\mathrm{d}u-\int_0^{t-t_0}G_n(u)\mathrm{d}u\right], t>t_0. \end{cases}$$

2. 回到(7)，用公式表示关于下述情况的方程：在 $t=0$ 时，所有车辆都以匀速 v_c

运动，然后对于 $t>0$，领头的汽车将减速。得出一个类似于(10)的 $V_{n+1}(s)$ 关于 $V_1(s)$ 的方程。

解：

$$V_{n+1}=\frac{V_1}{(s+1)^n}+sv_c\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(s+1)^k}\right).$$

3. 由

$$v_1(t)=\begin{cases}v_c, & t=0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

代表领头汽车的瞬时减速，导出

$$v_{n+1}(t)=v_c\sum_{k=1}^{n}\varphi k(t)$$

（见附录中第 10.2 节），然后作出 v_1，v_2，v_3，v_4 及 v_5 的图形。

线性顺序汽车模型

4. 对

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-x^5+\cdots$$

的两边求微分，得 $1/(1+x)^2$ 的一个级数，利用这个结果证明

$$\frac{v_3(t)}{v_c}=\frac{\lambda_0^2}{2!}(t-2T)^2h(t-2T)-\frac{2\lambda_0^3}{3!}(t-3T)^3h(t-3T)$$

$$+\frac{3\lambda_0^4}{4!}(t-4T)^4h(t-4T)-\cdots+\cdots.$$

稳定状态

5. 假设模型

$$\frac{d}{dt}v_{n+1}(t+T)=a_0\frac{v_n(t)-v_{n+1}(t)}{[x_n(t)-x_{n+1}(t)]^m},m>1.$$

（如果 $m=1$，这就是倒数间隔模型。）证明这个方程的解是

$$v_{n+1}(t+T)=(m-1)^{-1}a_0\{l^{-(m-1)}-[x_n(t)-x_{n+1}(t)]^{-(m-1)}\}$$

而稳态速度是

$$u=(m-1)^{-1}a_0[k_j^{-(m-1)}-k^{-(m-1)}].$$

模型构造

6. 写出 CFT 模型的微分方程，其中对第 $n+1$ 个驾驶员的刺激就是他与第 n 个驾驶员的间隔，而反应就是一个延迟 T 后他的加速度。假设灵敏度不变。

解：

$$\frac{d^2}{dt^2}x_{n+1}(t+T)=\lambda_0(x_n(t)-x_{n+1}(t)),n=1,2,3,\cdots.$$

7. 写出具有延迟的线性顺序汽车的微分方程，如果驾驶员的刺激是相对速度以及间隔同期望值 D 的偏差的线性组合，其中对每个刺激的灵敏度不变，但不相同。

解：

$$\frac{d^2x_{n+1}(t+T)}{dt^2}=\lambda_1\left[\frac{dx_n(t)}{dt}-\frac{dx_{n+1}(t)}{dt}\right]+\lambda_2[x_n(t)-x_{n+1}(t)-D],n=1,2,3,\cdots.$$

紧急情况控制模型

8. 假定当两辆汽车靠得太近以致间距小于某个临界值 X 时，后面的车将不再服从延迟为 T 的线性 CFT 模型，而且在延迟 T 后，用足力气踩下刹车使汽车得到机械许可的最大减速度，例如 $-\beta$，其中 $\beta>0$. 利用 Herviside 函数

$$h(t)=\begin{cases}1,t>0\\0,t<0\end{cases}$$

以及 t 时刻 X 与汽车间隔的偏差

$$Z_n\triangleq X-(x_n(t)-x_{n+1}(t)).$$

写出这个模型的微分方程。

解：

$$\frac{dv_{n+1}(t+T)}{dt}=\lambda_0[v_n(t)-v_{n+1}(t)][1-h(Z_n)]-\beta h(Z_n),n=1,2,3,\cdots.$$

前后控制模型

9. 写出一个具有延迟的线性 CFT 的微分方程。如果驾驶员受到 1)他和他前面的一辆汽车的相对速度的刺激；2)他和他后面的一辆汽车的相对速度的刺激；灵敏度的状态条件反映出他对前面一辆汽车的反应较强烈。

解：

$$\frac{dv_{n+1}(t+T)}{dt}=\lambda_1[v_n(t)-v_{n+1}(t)]+\lambda_2[v_{n+2}(t)-v_{n+1}(t)],$$

$$n=1,2,\cdots,\lambda_1>\lambda_2>0.$$

红绿灯刺激

10. 推广第 4 节和练习 4 的结果，计算 $v_4(t)/v_c$ 和 $v_5(t)/v_c$，然后，试着再现图 12.5 的结果。汽车最初相隔 20ft。如果求坐标 $x_n(t)$ 的对速度的积分是在计算机上进行的，那么问题或许就比较容易了。

稳定性

11. 看完附录中的第10.3节后，你能够就$\lambda_0 T = \pi/2$这种情况得出关于稳定性的什么结论？

参 考 文 献

[1] S. Bexelius, "An extended model for car-following," *Transportation Res.*, vol. 2, pp. 13—21, 1968.

[2] E. A. Bender and L. P. Neuwirth, "Traffic flow: Laplace transforms," *Amer. Math. Monthly*, vol. 80., pp. 417—423, 1973. Readable by students; develops some details of stability theory.

[3] R. E. Chandler, R. Herman, and E. W. Montroll, "Traffic dynamics: Studies in car-following," *Operations Res.*, vol. 6, pp. 165—184, 1958. First paper on stability theory develops asymptotic stability for a number of models; higher level than present module, but accessible to better students with some complex variable background.

[4] D. R. Drew, *Traffic Flow Theory and Control*. New York: McGraw-Hill, 1968. A book on many aspects of traffic science besides car-following; lots of practical examples, many topics accessible to undergraduates.

[5] L. C. Edie, "Car-following and steady-state theory for non-congested traffic," *Operations Res.*, vol. 9, no. 1, pp. 66—76, 1961.

[6] Denos C. Gazis, "Traffic flow and control: Theory and applications," *Amer. Scientist*, vol. 60, no. 4, pp. 415—424, 1972. A survey article on traffic science, like a *Scientific American article*.

[7] D. C. Gazis, R. Herman, and R. B. Potts, "Car-following theory of steady state traffic flow," *Operations Res.*, vol. 7, no. 4, pp. 499—505, 1959. Very readable; uses only algebra and simple integration.

[8] D. C. Gazis, R. Herman, and R. W. Rothery, "Nonlinear follow-the-leader models of traffic flow," *Operations Res.*, vol. 9, no. 4, pp. 545—567, 1961.

[9] H. Greenberg, "An analysis of traffic flow" *Operations Res.*, vol. 7, no. 1, pp. 79—85, 1959.

[10] R. Herman, *et al.*, "Traffic dynamics: Analysis of stability in car-following,"

Operations Res., vol. 7, pp. 86—106, 1959. The defintive article on stability theory; not accessible to average undergraduates.

[11] Robert Herman and R. B. Potts, Single-Lane Traffic Theory and Experiment, *Theory of Traffic Flow.* Amsterdam: Elsevier, 1961, pp. 120—146. Very readable summary of car-following without too many technical details; good source of experimental results.

[12] G. Lee, "A generalization of linear car-following," *Operations Res.*, vol. 14, no. 4, pp. 595—606, 1966.

[13] G. F. Newell, "Theories of instability in dense highway traffic," *J. Operations Res. of Japan*, vol. 5, pp. 9—54, 1962.

[14] L. A. Pipes, "An operational analysis of traffic dynamics", *J. Appl. Phys.* vol. 24, no. 3, pp. 274—281, 1953. The original paper on car-following; easily read by those with background to read this module.

[15] E. Tuck, "Stability of following in two dimensions," *Operations Res.*, vol. 9, no. 4, pp. 479—495, 1961.

[16] W. E. Wilhelm and J. W. Schmidt, "Review of car-following theory," *Transportation Engineering J. of ASCE*, vol. 99, no. TE4, pp. 923—931, 1973, A bibliographic survey; easily read by students.

教 师 参 考

目的 运用 Laplace 变换技术研究顺序汽车模型的微分方程和微分延迟方程。包括关于稳定性的一个颇具启发性的讨论，其中有关数学方面的详细内容放在附录中，利用初等积分推导了流量关于密度的稳态方程，讨论了它们对于其它交通理论的重要性及其经验结果。陷阱：当心 L 和 $\mathscr{L}$ 的区别；$\mathscr{L}$ 是通常的 Laplace 变换，而 $L \triangleq s\mathscr{L}$ 不要混淆不稳定性与碰撞；它们是既独立又相关的问题。

预备知识 微积分，运用 Laplace 变换的微分方程，直线运动的简单运动学。

时间 如果学生也读一点本章的话，三次讲授足够了。

第 13 章

平衡速度分布

Donald A. Drew *

1. 速 度 分 布

在交通流中，导致个别驾驶员延迟和受挫的基本驾驶过程之一，就是追上（即从后面靠近）一辆较慢的车辆。在美国常见的标准双向双车道公路上，那些试图迅速地从一处开到另一处的卡车、公共汽车以及旅游车（“星期日驾驶者”）司机实际上往往被延误。

我们将考察在一条很长的双向双车道公路上追赶和超车的过程。要研究导致一辆较快的汽车赶上一辆较慢的汽车的条件，必须具有某种技巧来处理不同汽车的不同速度。我们所用的概念是速度空间中的数值密度函数。（有时称这个速度空间为相空间。）

我们将通过某些例子来探讨这个概念。假设我们以速度在 0～10mi/h 为一类；10～20mi/h 为一类；等等；计数公路上的车辆。那么，如果用条形图描绘这些数据，就得到图 13.1(a)。这是信息的正确形式，不过它太粗糙了。

---

* Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Ploytechnic Institute, Troy, NY 12181.

我们再来取关于车数的数据，这次是按速度在 0～5mi/h 为一类，5～10mi/h 为一类，等等进行计数的。如图 13.1(b)。我们注意到中图 13.1(b)中，20～30mi/h 的车辆数是速度在 20～25mi/h 的车辆数与 25～30mi/h 的车辆数之和。

从图 13.1 上很难看出两个图中所描绘的数据表示同一条路上的同样的车辆集。如果我们描绘出**稠密度**，即与一定速度相对应的每单位速度的车辆数。那么，这两组数据看上去就比较相似了。用速度区间的长度去除以这个区间中的车辆数，就可以得到车辆数密度。图 13.2 描绘出对应于图 13.1(a)和 13.1(b)的车辆数密度。

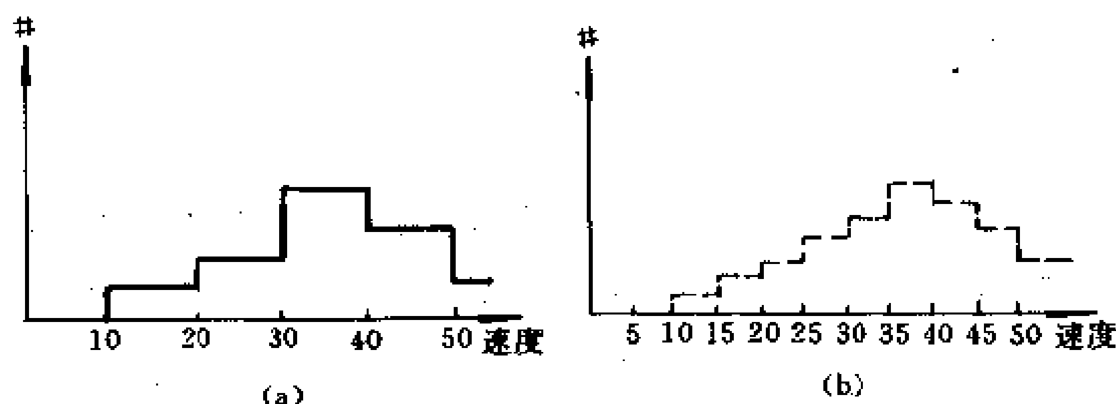


图 13.1

在绘制车辆密度时，并不一定非要以 5-mi/h 为区间段，我们可以使用 1-mi/h 区间段，0.5-mi/h 区间段，0.1-mi/h 区间段等等。使用的区间段越小，所绘出的速度空间结构就越详细。因此，区间段越小越好。

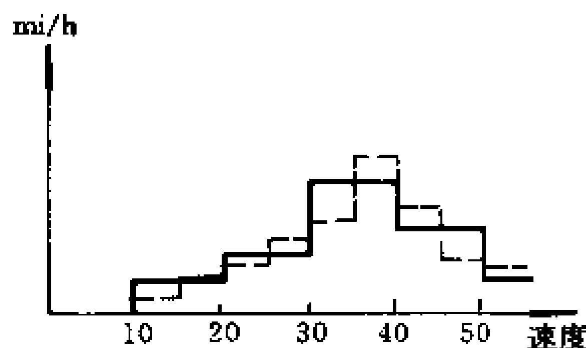


图 13.2

我们注意到，若要得到

第 i 个速度区间中的车辆数 n_i，只须将密度 f_i 乘上该区间的长度 Δu_i：

$$n_i = f_i \cdot \Delta u_i \tag{1}$$

如果我们希望计算 u_a 到 u_b 之间各种速度的车辆数 n，那就必须对每一个子区间上的车辆数 n_i 求和

$$n = \sum n_i = \sum f_i \Delta u_i, \tag{2}$$

其中求和是对 u_a 和 u_b 之间的子区间进行的。

我们希望用关于上述离散数字分布的一个数学抽象来进行研究。设 $f(u)$ 为速度 u 处车辆的连续密度分布，它是经过令 $\Delta u_i \to 0$，对车辆数密度作抽象的过程得到的。如果 u_a 和 u_b 是任意两个速度，那么，道路上速度介于 u_a 和 u_b 之间的车辆数由下式给出

$$n = \int_{u_a}^{u_b} f(u) \mathrm{d}u \tag{3}$$

一般地说，密度分布将随时间而变。同样，如果我们考察不同的路段，我们就希望看到受局部干扰（如一辆卡车的出现，或一段弯曲的公路）影响的不同分布。这种对时间和空间的依赖性是可以想象的，不过，为简单起见，我们将假定密度 f 仅仅依赖于速度，而与空间 x 和时间 t 无关。

2. 追　　赶

现在，让我们把注意力转向使 $f(u)$ 具体化的过程，即追赶和超车过程。所谓追赶是指赶上前面一辆较慢的车。而超车是指驶入逆行车道，赶到较慢的车子前面，然后返回一个较合适的速度。

考察以速度 u 行驶的车队。车辆的追赶过程将以两种方式改变以速度 u 行驶的车辆数。第一种方式，一辆以较高速度 $\bar{u}>u$ 行驶的汽车可能赶上一辆以速度 u 行驶的汽车，从而增加以速度 u

行驶的车辆数。于是，这些减慢下来的车辆加入到车队中，或加入到跟在其它车辆后面的汽车行列中（当然，这辆车可能是排队中的第一辆车）。参看图 13.3 第二种改变以速度 u 行驶的车辆数的方式，就是一辆以速度 u 行驶的汽车可能赶上一辆以较低速度 $\bar{\bar{u}}<u$ 行驶的汽车，这样就会引起以速度 u 行驶的汽车数量的损失。参看图 13.3。

现在，我们来计算一下由于追赶而引起的汽车数量的变化率 θ。设 $t=0$ 时，在点 x 处，有一辆正以速度 u 行驶的汽车。让我们算一下在时间区间 Δt 内，赶上这辆汽车的汽车数量，我们注意到，在区间 Δt 内，所有具有速度

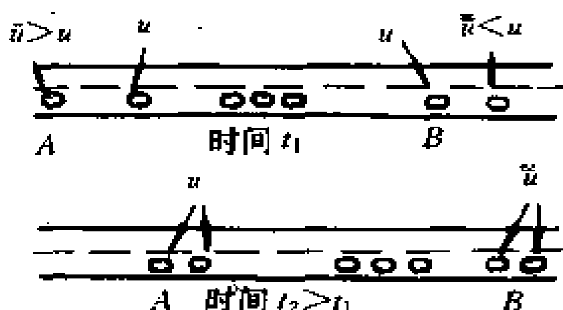


图 13.3

$\bar{u}>u$ 且位于 $x-(\bar{u}-u)\Delta t$ 到 x 区间内的汽车将在 x 处赶上这辆汽车。假设在一段长 L 的公路上，汽车的分布是均匀的，于是在区间 $x-(\bar{u}-u)\Delta t$ 到 x 内，具有速度 $\bar{u}>u$（每单位速度）的汽车数量为 $[(\bar{u}-u)\Delta t/L]f(\bar{u})$，其中 L 为所考虑的公路段的长度。这种汽车的总数为

$$\int_u^{\infty}\frac{(\bar{u}-u)\Delta t}{L}f(\bar{u})\mathrm{d}\bar{u}. \tag{4}$$

这样，赶上一辆已知速度为 u、位置为 x 的汽车的车辆的总数增加率就是这些汽车的总数除以时间区间 Δt，故增加率为

$$\int_u^{\infty}\frac{(\bar{u}-u)f(\bar{u})}{L}\mathrm{d}\bar{u} \tag{5}$$

要得到由于追上前面的汽车而以速度 u 行驶的汽车的增加率 G，就必须以找到一辆位于 x 处速度为 u 的汽车的概率乘以这个量。事实上，找到一辆位于 x 处速度为 u 的汽车的概率为

$(f(u)/N)(l/L)$，其中 N 为该公路段上汽车的总数，l 是一辆汽车的长度，而 l/L 为一已知汽车位于 x 处的概率。这样，由于追赶而造成速度为 u(每单位速度)的汽车的增加率为

$$G = K\int_{u}^{\infty}(\bar{u} - u)f(u)f(\bar{u})\mathrm{d}\bar{u} \tag{6}$$

其中 $K=l/(NL)^2$. *

我们可以就这个积分扩展到 $\bar{u}=\infty$ 的情况进行解释。我们希望在积分中包括所有速度大于 u 的汽车。这样，在任何适当的情况下，我们希望对于 $\bar{u}>u^*$，有 $f(\bar{u})=0$，其中 u^* 是一辆汽车的机械速度极限。于是，将积分上限取作无限，就避免了 u^* 的精确值的不确定性。

现在，让我们计算一下，由于赶上一辆较慢的汽车，以速度 u 行驶的汽车的数量损失率 $\mathscr{L}$。再考虑一辆位于 x 处，正以速度 u 行驶的汽车，并考虑区间 x 到 $x+(u-\bar{\bar{u}})\Delta t$ 内具有速度 $\bar{\bar{u}}<u$(每单位速度)的汽车数量。这个数量为

$$\frac{(u - \bar{\bar{u}})\Delta t \cdot f(\bar{\bar{u}})}{L}. \tag{7}$$

此类汽车的总数为

$$\int_{0}^{u}\frac{(u - \bar{\bar{u}}) \cdot \Delta t \cdot f(\bar{\bar{u}})}{L}\mathrm{d}\bar{\bar{u}}, \tag{8}$$

如前一样，追赶的损失率为

$$\mathscr{L} = K\int_{0}^{u}(u - \bar{\bar{u}})f(\bar{\bar{u}})f(u)\mathrm{d}\bar{\bar{u}}. \tag{9}$$

---

* 此处这样的说明不太妥当。我们感兴趣的不应是在路上某点 x 处由于追赶而造成的速度为 u 的汽车数量(每单位速度)的变化，而应是在整个路上速度为 u 的汽车数量(每单位速度)的变化。因此，乘以的量将不是概率 $(f(u)/N)(l/L)$，而是 $f(u)$，从而应为 $K=1/L$.

这可从本章习题 2 中得到旁证。按题中所给数据及原著公式，单位时间内追赶上速度为 u 的汽车的数量(单位速度内)为 $K\int_{u}^{\infty}(\bar{u} - u)f(\bar{u})f(u)\mathrm{d}(\bar{u}) \ll 1$. ——译注

结合增加率和损失率，我们得到一个由于追赶而产生的关于 $f(u)$（每单位速度）的净变化率

$$\theta = G - \mathscr{L} = K\int_0^{\infty}(\bar{u} - u)f(\bar{u})f(u)\mathrm{d}\bar{u}. \tag{10}$$

3. 超　　车

现在，让我们把注意力转向对超车过程的分析。没赶上来的汽车中有一部分 p 将立即超过前面的汽车，而被赶上的汽车基本没受影响。这样就导致了速度为 u 的汽车数量的损失，而且，由于立即超车，我们有一个负的变化率 $P_i = -p\theta$.

另外，迎面车的交通密度、在车队中的位置、以及希望开得快些的一般要求等，都将会产生其他复杂的超车过程。看来，用推理的方式不可能建立这个过程的模型。不过，通过假设一个**现象学模型**，即大体上是一个像我们期待的那样运行的模型，就可避开这个困难。我们期望，如果汽车能够保持在车队之外（追赶的结果），那么，它们将获得一个期望速度等于 $f_0(u)$ 的分布。假设如果实际以给定速度 u 行驶的汽车数比想要以此速度行驶的驾驶员人数多，那么驾驶员将要作超车。所以，如果 $f(u) > f_0(u)$，由于超车，将会出现一个以速度 u 行驶的汽车数量的净损失。另一方面，如果以速度 u 行驶的驾驶员比想要这样做的驾驶员少，那么，一部分作超车的驾驶员将加速到这个速度。这样，如果 $f(u) < f_0(u)$，由于超车就会产生一个速度为 u 的汽车数量

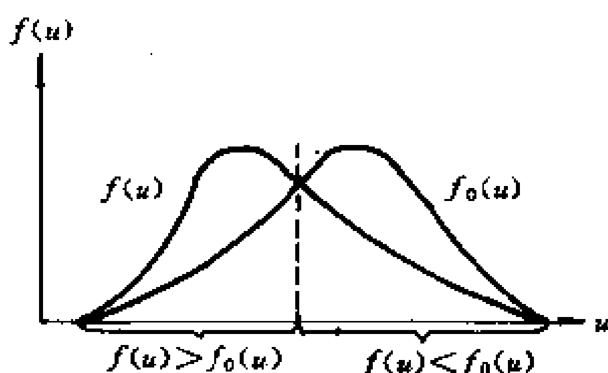


图 13.4

的净增加。事实上，我们假设，如果以非自身期望速度行驶的驾驶员越多，那么，超车就越多。参看图 13.4.

于是，由于这一非瞬间超车，$f(u)$（每单位速度）中的改变率为

$$P_n = \lambda(f_0(u) - f(u)). \tag{11}$$

注意到 λ 具有量纲(时间)$^{-1}$。量 $1/\lambda$ 通常被说成松弛时间，这个超车过程称为松弛。

4. 平 衡 分 布

由于我们的平衡假设（$f(u)$ 的净变化率为零），因此，由追赶和超车产生的变化率的和为零：

$$\theta - P_i + P_n = 0$$

$$= (1-p)K\int_0^\infty (\bar{u}) - u) f(\bar{u}) f(u) \mathrm{d}\bar{u} + \lambda(f_0(u) - f(u)) \tag{12}$$

方程(12)给出追赶与超车之间的一个平衡。求解 $f(u)$，得

$$f(u) = \frac{f_0(u)}{1 - \frac{(1-p)K}{\lambda}\int_0^\infty (\bar{u} - u) f(u) \mathrm{d}\bar{u}}. \tag{13}$$

让我们利用(13)作一些定性的计算。注意到，对于

$$\frac{(1-p)K}{\lambda}\int_0^\infty (\bar{u} - u) f(\bar{u}) \mathrm{d}\bar{u} < 0, \tag{14}$$

将有

$$f(u) < f_0(u). \tag{15}$$

因 $p<1, K>0, \lambda>0$，(14)等价于

$$u > \frac{\int_0^\infty \bar{u} f(\bar{u}) \mathrm{d}\bar{u}}{\int_0^\infty f(\bar{u}) \mathrm{d}\bar{u}} \triangleq u_a \tag{16}$$

其中 u_a 定义为公路上汽车的平均速度。

对于 $u<u_a$，有 $f(u)<f_0(u)$。这样，解(13)的一个性质就是，以低于 u_a 的速度行驶的车辆比想这样做的车辆多，而以大于 u_a 的速度行驶的车辆比想这样做的车辆少。这个预测看来是可以接受的。

在试图利用(13)进行预测时，要注意的问题是：为了预测，我们必须确定 $f_0(u)$的合适形式，以及确定 p 和 λ 的合适值。当然，这些量依赖于交通密度，它是由公路上的汽车数量 N 决定的。

另外，凭猜测，对于 λ 和 p 的适当值并给 $f_0(u)$取一个稍微随意的形式，我们能够对流量-密度关系作某些预测，这是交通流理论中的一个基本部分。关于这类问题有一个相当简单的计算，请参看练习 2.

本章的概念首先是为了将速度分布发展为沿道路位置的函数而引进的。控制分布 $f(t,x,u)$的偏微分方程与统计力学中研究的 Boltzman 方程十分相似。这种类似对交通理论家和统计力学家都有促进。从这个类似 Boltzman 的研究中，人们已经得到关于交通流的一些令人感兴趣的预测，请参看 Prigogine 和 Herman 的专题论文。不过，在数学方面还须做一些细致工作。

练　　习

1. 设 $f(u)=Be^{-(u-u_1)^2/\sigma^2}$，其中 B 和 σ 为正数，u 为一个参照速度。
   (a) 画出这个分布。
   (b) 计算
   $$u_u=\frac{\int_0^\infty uf(u)\mathrm{d}u}{\int_0^\infty f(u)\mathrm{d}u}.$$
   提示：你需要一张积分表或 $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x=\sqrt{\pi}/2$ 这个事实。
2. 设
   $$f_0(u)=\begin{cases}C(u-u_1)(u_2-u), & u_1\leqslant u\leqslant u_2,\\ 0, & u>u_2 \text{ 或 } u<u_1,\end{cases}$$

其中 C 为常数。

(a) 画出这个期望的速度分布。

(b) 计算 $N=\int_0^\infty f_0(u)\mathrm{d}u$.

(c) 设 $p=0.5$, $\lambda=0.01/\mathrm{s}$, $l=15\mathrm{ft}$, $C=500\ 000\mathrm{veh}/(\mathrm{mi/h})^3$, $u_1=20\mathrm{mi/h}$, $u_2=40\mathrm{mi/h}$, $L=20\mathrm{mi}$.

(i) 利用 $f(u)$ 依 $(1-p)K/\lambda$ 展开的幂级数展开式计算 u_a 的一个近似。

(ii) 利用 u_a 的这个近似求 $f(u)$

(d) p,λ,l,u_1,u_2 及 L 的值不变，但让 C 是任意的，求 $f(u)$ 依赖于 C 的一个近似。利用(b)，将 C 与 N 联系起来，并画出 q 关于 N 的图像。这是基本的流量-密度图。

参 考 文 献

[1] I. Prigogine and R. Herman, *Kinetic Theory of Vehicular Traffic*. New York: Elsevier, 1971. This book is the basis of the analysis in this module. However, they treat nonsteady and nonhomogeneous distributions, and hence the prerequisite for reading the book is some knowledge of Boltzmann-like partial differential equations.

Summaries of the Prigogine-Herman approact can be found in several sources:

[2] D. C. Gazis, *Traffic Science*. New York: Wiley-Inte-rscience, 1974.

[3] D. L. Gerlough and M. J. Hubber, *Traffic Flow Theory — A Monograph*, special Report 165, Traffic Research Board, National Research Council, Washington, DC, 1975.

教 师 参 考

目的 本章讨论在长距离公路上车辆的超车和追赶。在速度空间中我们强调了平衡概念，这在通常的应用问题中并不多见。

预备知识 微积分，概率密度，以及熟练的积分技巧。

时间 2 个课时足可以介绍完本章的内容。

第 14 章

交通流理论

Donald A. Drew *

1. 基 本 方 程

现在，我们来推导交通流的基本守恒方程。考虑一段公路上的汽车流动，它的特征是：这段公路（像瓶颈似的）的长度与汽车间的距离相比长得多。用 $n(x,x+\Delta x,t)$ 表示在 t 时刻，点 x 与点 $x+\Delta x$ 之间的汽车数量（参看图 14.1）。我们假设存在 $k(x,t)$，使得对任意 $x,\Delta x$，和 t

$$n(x,x+\Delta x,t)=\int_{x}^{x+\Delta x}k(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x}. \tag{1}$$

注意，根据微积分的基本定理，如果 k 是连续的，那么

$$k(x,t)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{n(x,x+\Delta x,t)}{\Delta x}.$$

在对感兴趣的情况建立适当的模型时，我们将假设 k 是连续的。

用无穷小术语讲，k 就是 t 时刻 x 与 $x+\Delta x$ 间的无穷小长度中每单位长度上的汽车数量。k 的经验值可由公路的空中照片确

---

* Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12181.

定。我们选取某个“微小”(无穷小的)长度Δx,算出x与$x+\Delta x$之间的汽车数量,然后用Δx除之。

现在,我们来定义流速$q(x,t)$. 简单地讲,流速就是t时刻通过点x的汽车数量,因此,在t时刻到$t+\Delta t$时刻期间,经过点x的总数量Q为

$$Q(x,t,t+\Delta t)=\int_t^{t+\Delta t} q(x,\hat{t})\mathrm{d}\hat{t}. \tag{2}$$

根据微积分基本定理,有

$$q(x,t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(x,t,t+\Delta t)}{\Delta t}. \tag{3}$$

q的经验值可由计时器获得,这个计时器记录下汽车经过点x的时间。我们选取某个“微小的”Δt,算出在t到$t+\Delta t$期间经过x的汽车数量,并用Δt除之。

现在,我们考虑这段路上车辆的平衡或守恒问题。让我们孤立地考察点x到$x+\Delta x$这一段路上汽车数量的改变率。

所谓平衡律是指:在一段路上汽车既没有生成也没有消灭(忽略碰撞!)。这样,车辆守恒就要求在x到$x+\Delta x$之间汽车数量的增加率等于这段路上汽车的流入率减去流出率。于是,对于任意时刻t,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x} k(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x}=q(x,t)-q(x+\Delta x,t). \tag{4}$$

这就是x到$x+\Delta x$这段路上的基本守恒律(平衡律),它是对路面的快镜拍照(参看图14.1)中看到的平衡的一种描述。我们注意到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x+\Delta x} k(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x}=\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial K}{\partial t}(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x} \tag{5}$$

用Δx除以此式并令$\Delta x\to 0$,于是,有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\int_x^{x+\Delta x}\frac{\partial K}{\partial t}(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{q(x,t)-q(x+\Delta x,t)}{\Delta x}. \tag{6}$$

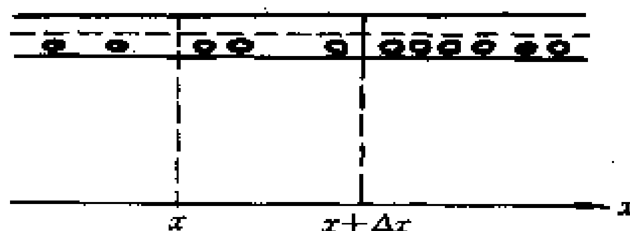


图 14.1　在某一时刻 t 的交通情况

根据微积分基本定理，左边的极限恰好是$(\partial K/\partial t)(x,t)$，而根据偏微分定义，右边商的极限是$-(\partial q/\partial x)(x,t)$. 这样，我们得出微分形式的平衡律

$$\frac{\partial K}{\partial t}+\frac{\partial q}{\partial x}=0. \qquad (7)$$

这个方程告诉我们，各点 x 的密度 k 是如何随流量 q 及时变化的。因此，要预测 k 如何变化，必须了解另一个变量 q.

定性地讲，这个方程是正确的，为明白起见，考虑下面的意向试验。如果 $\partial q/\partial x<0$，那么，在 x 的某个邻域中 q 是递减的，而且对某个很小的正数 ε，$q(x+\varepsilon,t)$ 小于 $q(x-\varepsilon,t)$. 这样，流出这一路段的汽车就比流入的少，因此，在此附近 k 必须及时增加。(7)就是从数学上说明了这种情况。

注意，现在我们有两个未知函数 k 和 q 但是只有一个方程(7)。因此，这个系数是**不确定的**。稍微思考一下我们就会确信，在这一阶段，这种不确定性是必要的。毕竟，我们基本上还一点没利用这样的事实，即我们正在想建立**车辆交通**模型。这种密度和流量也可以是河流中污染物质的浓度和流量，一根长棒中的热或电线中的电子或几乎任何一种一维状态中的流动。

我们需要更多的反映车辆交通特性的方程，这些方程可以是平衡方程（或许是关于 $\mathrm{d}/\mathrm{d}t\int_{x}^{x+\Delta x}q(\hat{x},t)\mathrm{d}\hat{x}$ 的方程）或只是关于附

近实际情况的经验数据的抽象。如果我们使用经验数据，那么，这些数据含有（我们希望！）关于实际情况的基本成分，我们称这样的关系为**基本方程**。对于这种交通流问题，我们有许多这种形式的数据，它们可以描绘出流速与密度的关系（q 作为 k 的函数），如图 14.2 所示（参看练习 1）。

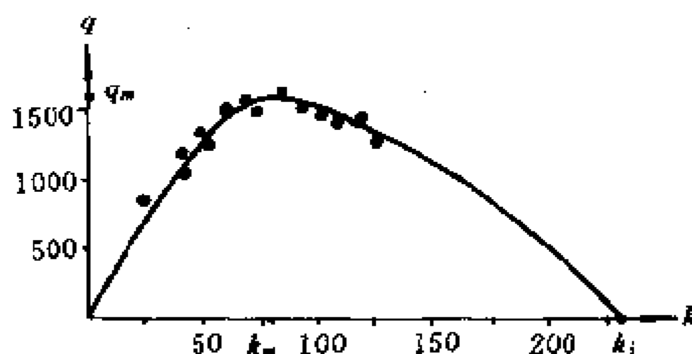


图 14.2　流量与密度的关系

这样，我们假设 $q=q(k)$. 值得注意的是，当 k 很小时，汽车的流量随 k 增加而增加，而当 k 趋近拥挤密度 k_j（仅略多于 225 veh/mi）* 时，流量减小到零。在大约 75veh/mi 处出现最大流速 1 500veh/h.

人们已经得到许多不同形式的适合这些数据的 $q(k)$. 有具有上述一般特性的简单形式，也有精确度很高的其它形式。其中，一个较简单的模型就是 Greenshields 模型：

$$q = u_f k\left(1 - \frac{k}{k_j}\right)$$

这里，u_f 表示这段路上的（经验的）自由速度（一辆汽车独自在公路上行驶时的速度），k_j 是拥挤密度（见练习 2）.

---

* 拥挤密度 k_j 就是当车辆挤在一起不动时，单位长度公路上的汽车数。

2. 干扰的传播

现在，我们来考虑在一条很长的公路上交通密度的演变。首先，我们假设k是x和t的函数，q是k的函数（图14.2）。根据计算$\partial q(k)/\partial x$的链式法则，可将(7)重新写成

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}=0. \tag{8}$$

考虑$x-t$平面中的一条曲线$x=x(t)$，k为常数。我们称这样的曲线为(8)的**特征曲线**，它满足隐函数关系

$$k(x(t),t)=\text{常数} \tag{9}$$

函数$x(t)$还满足方程

$$\frac{\partial k}{\partial x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial k}{\partial t}=0 \tag{10}$$

这个关于t的微分方程是对(9)进行微分后得到的，这里我们再次利用了链式法则。沿着一条特征曲线，$k(x,t)$同时满足(8)和(10)。因此，沿着特征曲线必有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k} \tag{11}$$

由于在$x=x(t)$上k是常数，所以$\mathrm{d}q/\mathrm{d}k$也是常数，对(11)求关于t的积分，立刻就可以得到特征曲线簇方程

$$x=\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}\right)t+x_0. \tag{12}$$

既然在每一条这样的曲线上k都是常数，那么，每一条曲线都是直线。注意，我们自始至终假设$\mathrm{d}q/\mathrm{d}k>0$.

如果我们知道$t=0$时x_0处的k值，那么，在直线$x=(\mathrm{d}q/\mathrm{d}k)t+x_0$上，各点处的$k$值都与$x_0$处的值相同。于是，用$x$和$t$来表示就有$x_0=x-(\mathrm{d}q/\mathrm{d}t)t$. 这样

$$k(x,t)=k(x_0,0)=k\left(x-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}t,0\right). \tag{13}$$

如果给出初始时刻 $t=0$ 的车辆密度 k,解差不多就可由于下面的关系式确定

$$k(x,t)=k\left(x-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}t,0\right).\qquad(14)$$

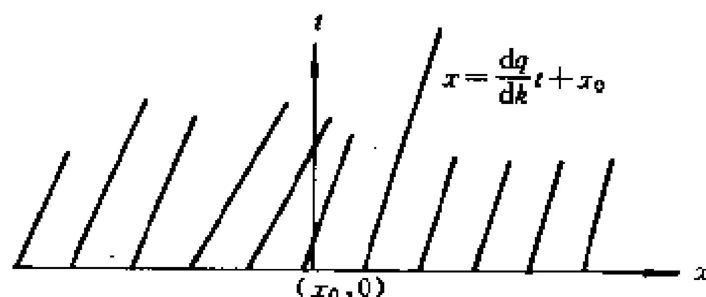


图 14.3　常数 k 的曲线(特征曲线)(对于与给定直线有关的 k 的特定值,直线的斜率由 $\mathrm{d}q/\mathrm{d}k$ 给出。)

考虑图 14.3 中从 $x=0$ 的邻域中发射出的直线。如果把这些直线延伸,它们将会相交。在它们的交点处,这个方程给出 k 的两个不同的值。实际上,这种情况是不会发生的。因此,沿着在某点 (x_1,t_1) 处相交的任何两条特征曲线偏微分方程不可能处处成立。稍加思考便可知道,至少在一条特征曲线上的某处,解一定是不连续的。我们将简要地讨论不连续点的位置。在讨论之前,我们注意到,间断点 (x,t) 的集合必定使每一条给定的直线与其它所有将与之相交的直线(由于不连续性)相分离。另外,可用 k 的两个不同值来预测相交点。这说明不连续点一定不止一个,显然是 $x-t$ 空间中的一条曲线(见图 14.4)。我们称这条由不连续点组成的曲线为**一次冲撞**。

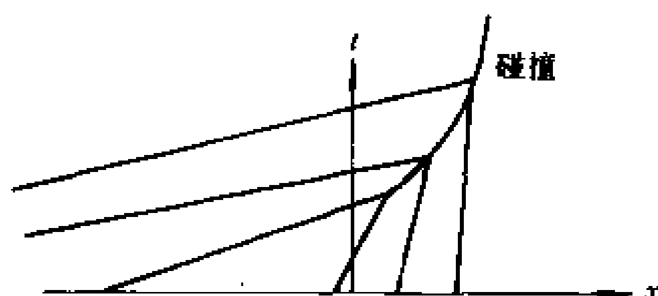


图 14.4 不连续点的蔓延

3. 冲　　撞

为了得出在冲撞时也成立的条件，我们取消可微性假设，重新推导平衡条件。考虑位于 $x_s-\epsilon$ 与 $x_s+\epsilon$ 之间的一段道路，其中 x_s 为冲撞的位置，ϵ 为某个很小的正距离。因冲撞随时间而移动，所以，所取的路段也随时间而变。当我们计算这段路上汽车的流入和流出时，必须说明这个移动。

首先我们注意到，因为路段很短，在它上面基本上找不到车辆，因此，流入率与流出率相等。

让我们来计算经过端点 $x_s(t)+\epsilon$ 流出该路段的速率。考虑 t 和 $t+\Delta t$ 两个时刻的道路，其中 Δt 很小（参看图 14.5）。这期间流出该路段的汽车总数可通过将此间经过 $x_s+\epsilon$ 的流量减去由于端点移到 $x_s(t+\Delta t)+\epsilon$ 处而未能驶出该路段的车辆来计算。

这样，流出该路段的汽车数量是

$$q(x_s(t)+\epsilon,t)\Delta t-k(x_s(t)+\epsilon,t)(x_s(t+\Delta t)-x_s(t)). \tag{15}$$

（注意，我们用的是流速和密度在 t 时刻的值，这种近似并非必要，我们也可以用时间 t 的其它值作代表。）

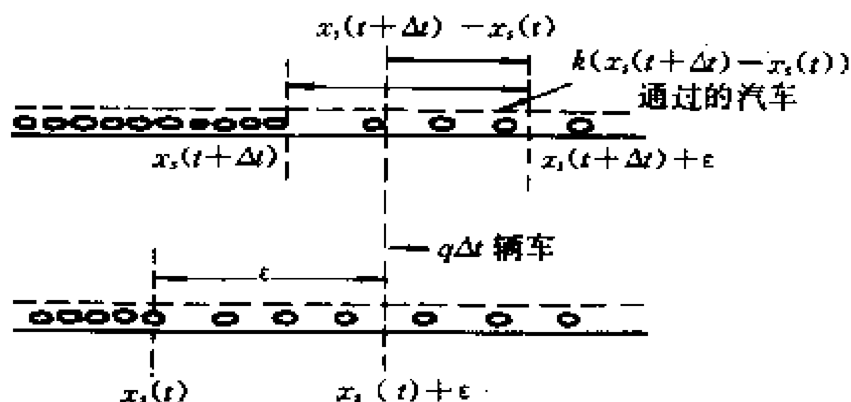


图 14.5 $x_s+\epsilon$ 处路段的流出

要计算车辆流出的速率，必须用 Δt 除以上式并令 $\Delta\to 0$. 于是，车辆的流出率是

$$q(x_s+\epsilon,t)-k(x_s+\varepsilon,t)\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}(t). \tag{16}$$

类似地，在 $x_s-\epsilon$ 处，流入率的计算由下式给出

$$q(x_s-\epsilon,t)-k(x_s-\varepsilon,t)\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t}(t). \tag{17}$$

因为，在这段路上没有车辆增加和毁坏，因此，两个流量速率的差必须等于 $x_s-\varepsilon$ 到 $x_s+\epsilon$ 这段路中车辆的累积率。令 $\epsilon\to 0$，如果我们希望没有车辆积累，那么(16)中的流出率必须等于(17)中的流入率*。

于是，我们有

---

* 原文误为“(16)中的流入率必须等于(17)中的流出率”。——译注

$$[q] - [k]\frac{\mathrm{d}x_s}{\mathrm{d}t} = 0, \tag{18}$$

其中

$$[f] = \lim_{\varepsilon \to 0}[f(x_s + \varepsilon, t) - f(x_s - \varepsilon, t)]$$

是函数 f 经过冲撞处的跃度。

于是冲撞的速度 $\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t$ 就由 $[q(k_2)-q(k_1)]/(k_2-k_1)$ 给出，其中 k_2 和 k_1 是冲击波前后的密度。我们注意到 $[q(k_2)-q(k_1)]/(k_2-k_1)$ 是流量-密度图中，连接点 $(k_1, q(k_1))$ 和 $(k_2, q(k_2))$ 的弦的斜率（图 14.2）。

如果对 $q(k)$ 使用 Greenshields 关系，我们得到

$$\frac{q(k_2) - q(k_1)}{k_2 - k_1} = \frac{1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}(k_1) + \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}k}(k_2)\right].$$

所以冲撞速度 $\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t$ 是在冲撞处相遇的特征曲线的斜率的平均值。利用这个规律并稍许实践一下，就可以描出比较复杂的交通流特征曲线和冲撞。

例如，我们来考虑交通"峰"的蔓延。如果这种峰如图 14.6(b) 所示，那么图 14.6(a)就描出了其特征曲线，我们看到，在 $x=0$ 周围的某个地方一定形成一个冲撞，并持续地与一对对特征曲线交于它们的平均斜率处。

图 14.6 所示的情况对应着 $k<k_m$ 的低密度流量，其中 k_m 对应着最大流量。如果我们考虑密度大于 k_m，那么冲撞将向后蔓延。参看练习 3。

我们还要指出，$\mathrm{d}x_s/\mathrm{d}t$ 是冲撞的蔓延速度，与单个汽车的速度无关。$u=q/k$ 定义的平均交通速度对于 $0<k<k_j$，其值总是正的。换句话说，冲撞速度是正或是负，依赖于两边的密度。

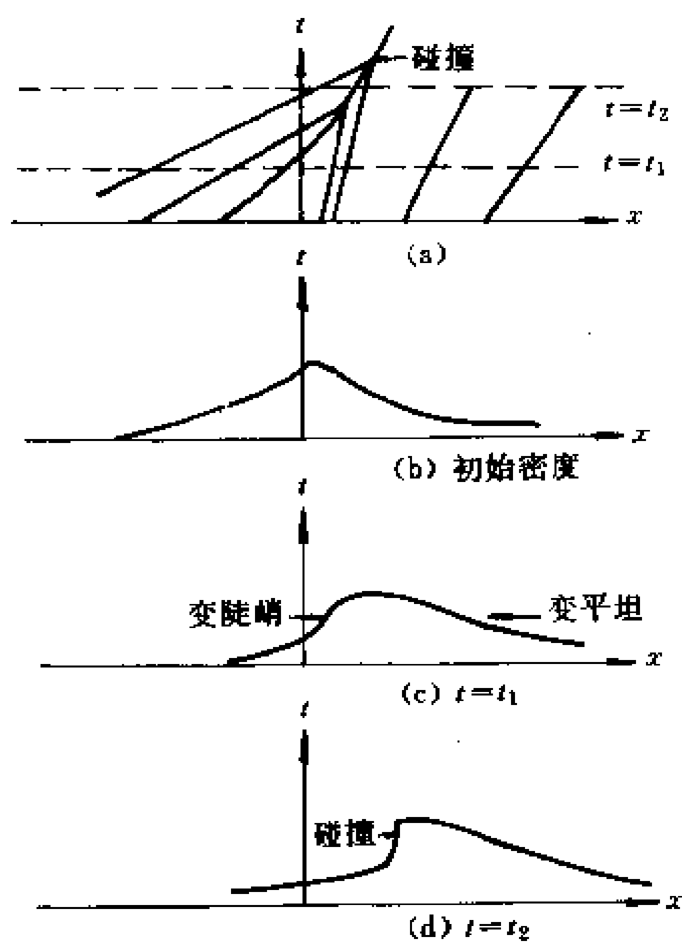


图 14.6　冲撞的发展

练　习

1. 给定下列数据

k(veh/mi)	$\frac{q}{k}$(mi/h)	q(veh/h)
33	31	1 023
43	26	1 018
43	27	1 061
48	23	1 104
50	26	1 300
92	12	1 104
96	12	1 112
98	11	1 078
103	10	1 030
106	10	1 060
107	10	1 070
110	8	880
110	9	990
114	9	1 026
118	9	1 062
119	9	1 071
119	9	1 071
121	9	1 089
134	8	1 072
135	8	1 080
137	8	1 096

利用最小平方拟合：

a) Greenshields 模型

$$q = u_f k(1 - k/k_j);$$

b) Greenberg 模型

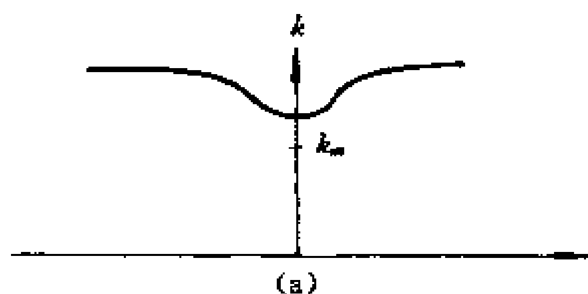
$$q = u_m \ln(k_j/k).$$

即在 a) 中选取 u_f 和 k_j 使 $\sum_{i=1}^{N}[q_i - u_f k_i(1 - k_i/k_j)]^2$ 极小，其中 (k_i, q_i) 是数据表中的一项。

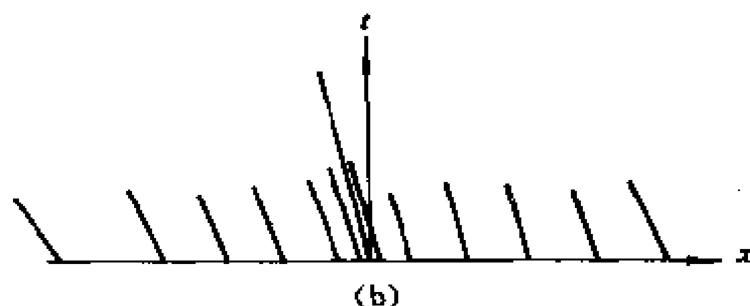
2. 对于 Greenshields 模型计算最大流速。最大流速在什么密度处出现？

3. 考虑图 14.7 所示的交通状况的传播，其中 $k>k_m$ 图 14.7(b) 给出了 t 很小时

的特征。利用你对冲撞构成的直觉，预测什么时候会形成冲撞，且将如何传播。



(a) $t=0$ 处的密度



(b) 对应于(a)中密度的特征曲线。

图 14.7

参 考 文 献

[1] F. A. Haight. *Mathematical Theories of Traffic Flow*. New York: Academic, 1963. This book is nicely mathematical, quite general, and not too hard to read. It is somewhat dated.

[2] D. R. Drew. *Traffic Flow Theory and Contrlo*. New York: McGraw-Hill, 1968. No relation. A very general, readable book. It has many simple but important calculations pertaining to different aspects of highway design.

[3] D. C. Gazis. *Traffic Science*. New York: Wiley-Inters-cience, 1974. Chaper 1,

written by L. C. Edie, deals with flow theories and is quite up to date.

[4] D. L. Gerlough and M. J. Huber, *Traffic Flow Theory, A Monograph*, Special Report 165, Traffic Research Board, National Research Council, Washington, D. C, 1975. Everything you always wanted to know about traffic flow theory and more. This is an expensive paperbound monograph which synthesizes and reports, in a single document, the present state of knowledge in traffic flow theory. Not for children.

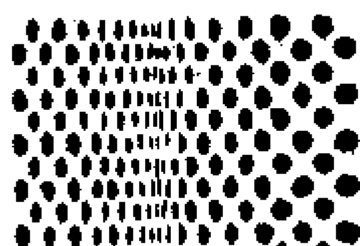
教 师 参 考

目的 本章介绍了推导运动守恒方程所须的基本平衡概念，讨论了交通流的基本方程。为说明模型(以及物理状态)的复杂性，根据一些初步原理推导出并运用了一阶偏微分方程的特征曲线。这一章主要是强调建模思想。

预备知识 多元微积分和微分方程以及某些更高深的知识将会增进读者对本章模型的了解。

时间 3 课时。

第V部分



相互制约类：非线性系统的稳定态

第15章

在第一次世界大战期间，为什么地中海的鲨鱼被捕获的百分比惊人地上升

Martin Braun *

20世纪20年代中期，意大利生物学家Umberto D' Ancona研究了相互制约的各种鱼类群体的变化情况，在研究过程中，他偶然注意到了第一次世界大战时期，在地中海不同港口捕获进港的几种鱼类的数量占总数百分比的数据。特别地，这些数据给出了软骨鱼（鲨鱼，鳐鱼，魟鱼，等等）占被捕获总数的百分比，而这类鱼并不像食用鱼那么合乎人们的需要。关于Rijeka（里耶卡，属南斯拉夫——译注）港1914—1923年间的数据如下：

1914	1915	1916	1917	1918	1919	1920	1921	1922	1923
11.9%	21.4%	22.1%	21.2%	36.4%	27.3%	16.0%	15.9%	14.8%	10.7%

在战争时期，捕获几种软骨鱼的百分比如此大量的增长，曾使D' Ancona困惑不已。明明白白的，他断定几种软骨鱼的百分比的增长是由于在这个时期大大地降低了捕鱼的强度，然而，捕鱼的强度又是怎样地损害着鱼群的呢？这个问题的答案对于研究物种竞争中各自怎样为生存而斗争的D' Ancona是十分重要的。它对渔

* Department of Mathematics, Queens College, Flushing, NY 11367.

业生产也有很大关系，因为这显然涉及到该采取什么办法来捕鱼。

食用鱼和软骨鱼的区别在于，软骨鱼是捕食者，而食用鱼是软骨鱼的捕获对象；软骨鱼依靠着食用鱼而生存。起先，D′ Ancona 以为这就是造成战争期间软骨鱼大量增长的原因。由于在这个期间捕鱼的强度大大地降低了，软骨鱼就可以得到更多的捕获物了，因此它也就快速地增殖和茁壮地成长起来。然而，这种解释并不是无懈可击的，因为在这期间食用鱼也更丰富了。D′ Ancona 的分析仅仅表明，当捕鱼水平降低时，可以得到更多的软骨鱼；但不能解释为什么降低捕鱼水平时，比起捕获对象来，会更有利于捕食者。

详尽无遗地研究了对于这种现象的各种可能的生物学的解释之后，D′ Ancona 求助于他的同事——著名的意大利数学家 Vito Volterra，希望 Volterra 能使软骨鱼和它们的捕获对象（即食用鱼）增长的数学模型公式化，而且这模型还将为 D′ Ancona 的问题提供解答。在研究这个问题的过程中，Volterra 首先把所有的鱼类分为被捕食者鱼群 $x(t)$ 和捕食者鱼群 $y(t)$. 然后，他解释说，由于食用鱼不那么密集及其食物又丰，于是它们之间并不为食物而剧烈地竞争。因此，在没有软骨鱼的情况下，食用鱼将服从马尔萨斯(Malthus)的人口增长律 $\dot{x}=ax$，其中 a 为某个正常数。其次，Volterra 认为，在每个单位时间内，捕食者与被捕食者之间相接触的总数为 bxy，其中 b 为某个正常数。因而 $\dot{x}=ax-bxy$. 类似地，Volterra 断定捕食者既有一个正比于它们现存数目的固有的减少率 cy，也有一个正比于它们现存数目 y 和它们的捕获对象 x 的增长率 bxy. 于是，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=ax-bxy,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-cy+bxy. \tag{1}$$

方程组(1)给出了在没有捕鱼的情况下，软骨鱼和食用鱼之间相互影响的关系。我们将仔细地分析这个方程组以及得到它的解的某些有趣的性质。然后再在我们的模型中计入捕鱼的影响，并说

明：比起食用鱼来，为什么降低捕鱼水平更有利于软骨鱼。事实上，我们将得到一个意外的结果——降低捕鱼水平，实际上对食用鱼是有害的。

首先，注意到方程(1)有两个平衡解 $x(t)=0, y(t)=0$ 和 $x(t)=c/\mathrm{d}, y(t)=a/b$. 自然，对第一个平衡解，我们是没有兴趣的。这个方程组也有解族 $x(t)=x_0e^{at}, y(t)=0$ 和 $x(t)=0, y(t)=y_0e^{-ct}$. 于是，x 轴和 y 轴两者是(1)的轨道。这意味着，在时刻 $t=t_0$ 由第一象限 $x>0, y>0$ 开始的(1)的每一个解 $x(t), y(t)$，对于未来的一切时刻 $t\geqslant t_0$，仍保留着 $x>0, y>0$.

对于 $x, y\neq 0$(1)的轨道是一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-cy+bxy}{ax-bxy}=\frac{y(-c+\mathrm{d}x)}{x(a-by)} \tag{2}$$

的解曲线。这个方程是可分离变量的，因为我们可以把它写成

$$\frac{a-by}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{-c+\mathrm{d}x}{x}.$$

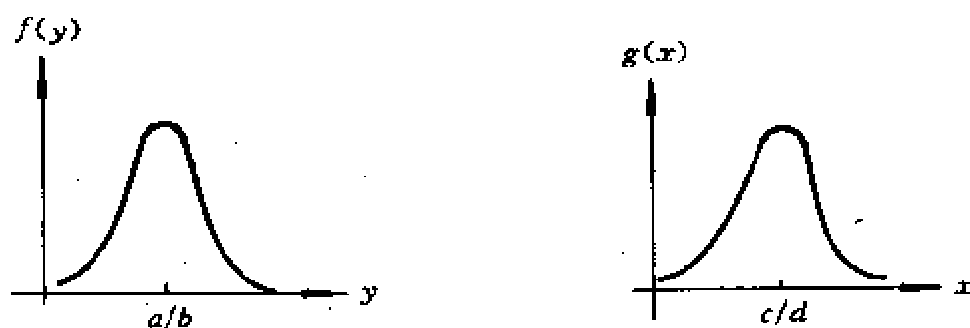


图 15.1

因此，$a\ln y-by+c\ln x-dx=k_1$，其中 k_1 为某个常数。在这个方程两边取指数，得

$$\frac{y^a}{e^{by}}\cdot\frac{x^c}{e^{dx}}=K. \tag{3}$$

其中 K 为某个常数。于是，(1)的轨道是由(3)定义的曲线族，且这

些曲线族，正如我们马上要证明的，是封闭的。

引理1 对于 $x,y>0$，方程(3)定义了一族封闭曲线。

证明 第一步，当 $x>0,y>0$ 时确定函数 $f(y)=y^a/e^{by}$ 和 $g(x)=x^c/e^{dx}$ 的特性。为此，注意到 $f(0)=0,f(\infty)=0$，且当 $y>0$ 时 $f(y)$ 也大于零。计算

$$f'y=\frac{ay^{a-1}-by^a}{e^{by}}=\frac{y^{a-1}(a-by)}{e^{by}},$$

我们看到，$f(y)$ 在 $y=a/b$ 处有唯一的临界点。因此，$f(y)$ 在 $y=a/b$ 处达到它的最大值 $M_y=(a/b)^a/e^a$，而 $f(y)$ 的图像有图15.1(a)所示的形状。类似地，$g(x)$ 在 $x=c/\mathrm{d}$ 处达到它的最大值 $M_x=(c/\mathrm{d})^c/e^c$，而 $g(x)$ 的图像有图15.1(b)所示的形状。

由以上的分析可推断出，当 $K>M_xM_y$ 时，(3)没有 $x,y>0$ 的解，而当 $K=M_xM_y$ 时，有唯一的解 $x=c/d,y=a/b$. 这样，我们只需考虑 $K=\lambda M_y$ 的情况，其中 λ 是小于 M_x 的一个正数。先注意到，方程 $x^c/e^{dx}=\lambda$ 有一个解 $x=x_m<c/d$，而另一个解为 $x=x_M>c/d$. 因此，当 x 小于 x_m 或大于 x_M 时，方程

$$f(y)=y^ae^{-by}=\left[\frac{\lambda}{x^ce^{-dx}}\right]M_y$$

没有解 y. 当 $x=x_m$ 或 x_M 时，它有唯一的解 $y=a/b$，而对于介于 x_m 和 x_M 之间的任一个 x，它有两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$. 较小的解 $y_1(x)$ 总是比 a/b 小，而较大的解 $y_2(x)$ 总是比 a/b 大。当 x 趋于或者 x_m 或者 x_M 时，$y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都趋于 a/b. 因此，由(3)定义的曲线，当 x 和 y 大于零时，是闭的，且具有图15.2所示的形状。此外，这些闭曲线(除 $x=c/\mathrm{d},y=a/b$ 以外)中，没有一条包含(1)的任何平衡点。因此。当 $x(0)$ 和 $y(0)$ 是正时，(1)的一切解 $x(t),y(t)$ 都是时间的周期函数。* 换句话说，$x(0)$ 和 $y(0)$ 为正值时的(1)的每

---

* 这个命题的详细证明见[3]的4.6节。

一解 $x(t)$，$y(t)$，都有 $x(t+T)=x(t)$ 和 $y(t+T)=y(t)$ 的性质，其中 T 为某个正数。

D' Ancona 的数据确实是捕食者每年的年平均数。这样，为了把这些数据和(1)所预测的结果进行比较，我们必须算出(1)的任一个解 $x(t)$，$y(t)$ 的"平均值"。值得注意的是，尽管我们不能精确地计算出 $x(t)$ 和 $y(t)$，却可以求得它们的平均值。这就是引理 2 的内容。

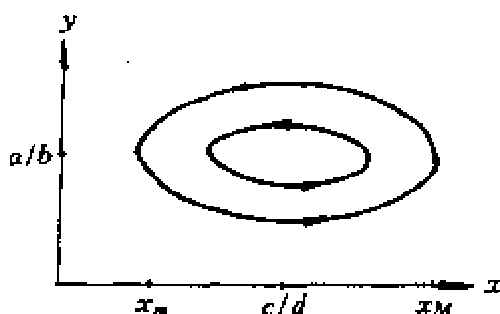


图 15.2

引理 2 设 $x(t)$，$y(t)$ 是(1)的一个周期解，具有周期 $T>0$. 定义 x 和 y 的平均值为

$$\bar{x}=\frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t, \qquad \bar{y}=\frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t.$$

那么，$\bar{x}=c/d$ 及 $\bar{y}=a/b$. 换句话说，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的平均值就是平衡值。

证明 用 x 去除(1)的第一个等式的两边，得到 $\dot{x}/x=a-by$，于是

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{\dot{x}(t)}{x(t)}\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T [a-by(t)]\mathrm{d}t.$$

令 $\int_0^T \dot{x}(t)/x(t)\mathrm{d}t=\ln x(T)-\ln x(0)$，因为 $x(T)=x(0)$，于是这个等式等于零。因此

$$\frac{1}{T}\int_0^T by(t)\mathrm{d}t=\frac{1}{T}\int_0^T a\mathrm{d}t=a,$$

于是，$\bar{y}=a/b$。类似地，用 $Ty(t)$ 去除(1)的第二个等式的两边并从 0 到 T 进行积分，可得 $\bar{x}=c/d$.

现在，在我们的模型中，可计人捕鱼的影响了。注意到，捕鱼使

食用鱼的总数按 $\varepsilon x(t)$ 的速度减少，软骨鱼总数按 $\varepsilon y(t)$ 的速度减少。常数 ε 反映着捕鱼的强度；即海上的船只数目和水中网的数目。这样，真实情况就用修正过的微分方程组

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= ax - bxy - \varepsilon x = (a-\varepsilon)x - bxy,\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= -cy + dxy - \varepsilon y = -(c+\varepsilon)y + dxy\end{aligned} \tag{4}$$

来描述了。对于 $a-\varepsilon>0$，用 a 代替 $a-\varepsilon$，用 c 代替 $c+\varepsilon$，这个方程组就正好与(1)相同了。所以，$x(t)$ 和 $y(t)$ 的平均值现在为

$$\bar{x} = \frac{c+\varepsilon}{d}, \qquad \bar{y} = \frac{a-\varepsilon}{b}. \tag{5}$$

因此，适度的增加捕鱼量($\varepsilon<a$)，实际上就使食用鱼的数量（按平均数来计算）在增加，而软骨鱼的数量（按平均数来计算）在减少。相反，降低捕鱼水平，那么，按平均数来计算，软骨鱼的数量在增加，而食用鱼的数量在减少。这个不平常的结果称为 Volterra 原理，它解释了 D' Ancona 的数据，并完全解决了我们的问题。

Volterra 原理在杀虫剂的研究中已有惊人的应用。这种杀虫剂既消灭昆虫中的捕食者，也消灭昆虫中的被捕食者。这意味着杀虫剂的使用，将使那些由捕食昆虫者控制着的昆虫实际上增加起来。一个值得注意的例证，来自像棉垫一样柔软的介壳虫（吹棉蚧），1968 年，它偶然地由澳大利亚传入后，威胁着美国的柠檬生产。随后，引进了介壳虫的澳大利亚天然捕食者——一种瓢虫（澳洲瓢虫），使介壳虫减少到很低的程度。当DDT（滴滴涕）被发现并用来消灭介壳虫时，果园主就想用它来进一步减少介壳虫。可是，按照 Volterra 原理，这只会使介壳虫增加起来！

说也奇怪，许多生态学家和生物学家不愿意把 Volterra 的模型作为准确的东西接受。他们指出，按 Volterra 模型预言的摆动的情况，在大多数捕食者-被捕食者系统中是观察不到的。相反，大多数这样的系统，当时间延长下去时，趋于平衡状态。对于这些评论

家们，我们的回答是，微分方程组(1)并不意味着是捕食者-被捕食者相互制约的一般模型。这是因为，食用鱼和软骨鱼并未为了有用的资源而在各自内部进行剧烈的竞争。更一般的捕食者-被捕食者相互制约的模型是微分方程组

$$\dot{x} = ax - bxy = ex^2, \qquad \dot{y} = -cy + dxy - fy^2. \tag{6}$$

其中，ex^2 项反映了被捕食者 x 由于有限的外部资源而进行的内部竞争，fy^2 项反映了捕食者之间由于有限的被捕食者而进行的竞争。(6)的解，一般来说不是周期的。实际上，当 e 和 f 均为正数时，可以证明(稍许困难些)，(6)的所有解近似于平衡解。

意想不到的是，某些生态学家和生物学家，甚至连更一般的模型(6)也不愿意作为准确的东西来接受。作为一个反例，他们引用了数理生物学家 E. F. Gause 的一些实验。在这些实验中，群体由原生动物门中的两种组成，其中之一(双环栉毛虫)以另一种(草履虫)为食。在 Gause 的所有实验中，毛虫迅速地消灭草履虫，然后因缺乏食物而活活饿死。这种情况不能用(6)作为模型，因为具有 $x(0)y(0)\neq 0$的(6)的解，没有一个能在有限时间内达到是 $x=0$ 或 $y=0$ 的。

对于这些批评家们，我们的回答是，毛虫是特殊的非正常的捕食者的典型。一方面，它们是凶恶的攻击者，需要巨额的食物：每3小时，一只毛虫就需要一只生气勃勃的草履虫。另一方面，毛虫又不会因为草履虫的供应不足而灭亡。它们继续成倍地增殖，只是生出更弱小的后代罢了。这样，方程组(6)就不是草履虫和毛虫相互制约的准确模型了。对于这种情况，一个更好的模型是微分方程组

$$\frac{dx}{dt} = ax - b\sqrt{xy} \qquad \frac{dy}{dt} = \begin{cases} d\sqrt{xy}, x \neq 0 \\ -cy, x = 0. \end{cases} \tag{7}$$

可以证明(见练习 6)，(7)在 $x(0)$ 和 $y(0)$ 都是正的条件下的每一个解 $x(t), y(t)$，在有限时间内都达到 $x=0$. 这和存在唯一性定理并不矛盾，因为函数

$$g(x,y)=\begin{cases} d\sqrt{xy}, & x\neq 0 \\ -cy, & x=0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处没有关于 x 或 y 的偏导数。

最后，我们来叙述一些这样的捕食者-被捕食者的相互制约。它们存在于自然界中，但其群体量不可能用任何常微分方程组作模型来表征。当被捕食者具备捕食者无法进去的藏身之处的时候，这种情况就出现了。在这些情况下，对于捕食者和被捕食者未来的数目作出明确的叙述是不可能的。因为，我们不好预言，究竟有多少被捕食者会愚蠢到离开它们的避难所。换句话说，这样的过程是**随机性**的，而不是**确定性**的，因此不能用常微分方程组来作模型。这直接地被 Gause 所做的出色的实验证实了。他在 30 个相同试管的每一个试管中，都放进了 5 条草履虫和 3 条毛虫，并给草履虫准备了避难所，以防止毛虫的袭击。两天以后，他发现，有 4 个试管中的捕食者死了，而在其余 26 个试管中，混合的群体含有 2 至 38 条草履虫不等。

练　习

1. 求出(6)所有的生物学上实际的平衡点，并确定它们的稳定性。
2. 容易证明，如果 $c/d>a/e$，那么，对于(6)的一切解 $x(t)$、$y(t)$ 来说，$y(t)$ 终归要趋于零。证明(6)的解 $x(t)$，$y(t)$ 存在，且 $y(t)$ 在开始时递增，直到最大值，然后递减到零。（一个观察者，如果只看到捕食者而没注意到被捕食者，那么，对于群体经历极大值再全部灭亡这样的情况，要解释清楚是十分困难的。）
3. 在许多情况下，捕食者主要是袭击被捕食者中的成年者，而幼小的成员，或者靠着细小的身子，或者靠着不同的活动场所，被较好地保存了下来。设 x_1 为成年被捕食者的总数，x_2 为幼小者的总数，而 y 为捕食者的总数。那么

$$\dot{x}_1=-a_1x_1+a_2x_2-bx_1y,$$

$$\dot{x}_2=nx_1-(a_1+a_2)x_2,$$

$$\dot{y}=-cy+dx_1y.$$

其中，a_2x_2 表示幼小的成员（每单位时间）成长为成年者的总数，n 表示与成年者总数成正比的出生率。求这方程组的一切平衡解。

4. 自然界中存在许多这样的情况，第一种被捕食者依赖于第二种被捕食者，而第二种又依赖于第三种。马来西亚的 Komodo 岛上就有这种群体，其中居住着巨大的食肉爬行动物以哺乳动物为生，而哺乳动物又以岛上丰富的草木为食物。我们假定，爬行动物对于草木没有直接影响，而只有植物自身之间为了它们有用的资源在竞争。控制这种相互制约的微分方程组是

$$\dot{x}_1 = -a_1x_1 - b_{12}x_1x_2 + c_{13}x_1x_3,$$
$$\dot{x}_2 = -a_2x_2 + b_{21}x_1x_2,$$
$$\dot{x}_3 = a_3x_3 - a_4x_3^2 - c_{31}x_1x_3.$$

求方程组所有的平衡解。

5. 考虑一个捕食者有备用食物保证的捕食者-被捕食者系统。这种系统可以用微分方程

$$\dot{x}_1 = a_1x_1(\beta_1 - x_1) + \gamma_1x_1x_2,$$
$$\dot{x}_2 = a_2x_2(\beta_2 - x_2) - \gamma_2x_1x_2$$

作为模型，其中 $x_1(t)$ 和 $x_2(t)$ 分别为时刻 t 的捕食者和被捕食者的总数。

a) 证明，作坐标变换 $\beta_iy_i(t) = x_i(t/a_i\beta_i)$，可将这方程组简化为

$$\dot{y}_1 = y_1(1 - y_1) + \alpha_1y_1y_2,$$
$$\dot{y}_2 = y_2(1 - y_2) - \alpha_2y_1y_2.$$

其中，$\alpha_1 = \gamma_1\beta_2/a_1\beta_1$，$\alpha_2 = \gamma_2\beta_1/a_2\beta_2$.

b) 在(i) $0 < \alpha_2 < 1$，(ii) $\alpha_2 > 1$ 的条件下，稳定平衡时的群体数各是多少？

c) 我们观察到，$\alpha_1 = 3\alpha_2$（α_2 是捕食者攻击的数目）。如果捕食者的本能使它的稳定平衡群体数达到最大限度，α_2 的值应等于多少？

6. a) 设 $x(t)$ 是 $\dot{x} = ax - M\sqrt{x}$ 当 $M > a\sqrt{x(t_0)}$ 时的解。证明

$$a\sqrt{x} = M - \left(M - a\sqrt{x(t_0)}\right)e^{a(t-t_0)/2}.$$

b) 从 a)推断出 $x(t)$ 在有限时间内趋近于零。

c) 设 $x(t)$，$y(t)$ 为(7)当 $by(t_0) > a\sqrt{x(t_0)}$ 的解。证明，在有限时间内，$x(t)$ 到达零。提示：注意到 $y(t)$ 在 $t \geqslant t_0$ 时是递增的。

d) 可以证明，当 $x(t_0)$ 和 $y(t_0)$ 均为正的时候，对于(7)的每一个解 $x(t)$、$y(t)$，$by(t)$ 最后将大于 $a\sqrt{x(t)}$，由此推出，(7)的一切解 $x(t)$，$y(t)$，在有限时间内达到 $x = 0$.

参 考 文 献

[1] V. Volterra, *Lecons sur la theorie mathematique de la lutte pour lavie* Paris, 1931.

[2] G. F. Gause, *The Struggle for Existence*, New York Hafner, 1964.

[3] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 2nd ed. New York: Spriger-Verlag, 1978.

教 师 参 考

目的　本章讨论了鲨鱼-食用鱼群体的 D' Ancona-Volterra（或 Lotka-Volterra）模型。证明了鲨鱼和它们的捕获物（食用鱼）相比，捕鱼不足更有利于前者。

预备知识　可分离变量的微分方程。自控系统的轨道。

时间　1～2 课时。

第 16 章

二次总数模型:几乎没有任何循环性

Courtney S. Coleman *

1. 二次总数模型

加拿大北部森林里的山猫和野兔群体的盛衰,令人不可思议,十年一循环。亚得里亚海的鲨鱼总数和食用鱼总数,都以难以理解的方式摆动着**。我们的目的是想建立任何两种物种相互制约的简单数学模型,而且在这些模型中找出循环稳定的情况。我们的结果看来好像正相反,正如我们要看到的那样,大多数简单系统根本就没有循环,只有著名的 D' Ancona-Volterra(或 Lotka-Volterra)系统例外[5]. 试图建立一个综合方法以越过这矛盾,就产生了一个内容丰富的模型化的观点。一种现象的几个性质不同的模型,比起一个模型来,可给予我们对这个现象更多的了解。

我们从两种相互制约的物种开始。设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示两种物种在 t 时刻各自的**总数**(即个体的数目)。(有时用总数密度——栖息处每单位面积或体积上的数目,来代替这里的总数,不过,我们

* Department of Mathematics, Harvey Mudd collge, Claremont, CA 91711.

** 关于这些和类似现象的研究见[5],[6],[8]~[14]。

不准备这样做。）$x(t)$和 $y(t)$的值是整数，且随时间按整数值变化。不过，对于很大的总数来说，在一个短暂的时间间隔内增加一二个，相对于全体来说是“极小的”，因而我们可以把总数看作是连续变化的，以代替离散的跳跃的变化。我们只要假定 $x(t)$和 $y(t)$是连续的，便可不妨同意磨光 $x(t)$和 $y(t)$图形上的任何拐角，从而假定这两个函数都是可微的。图 16.1 表示了 $x(t)$的这种修匀过程。

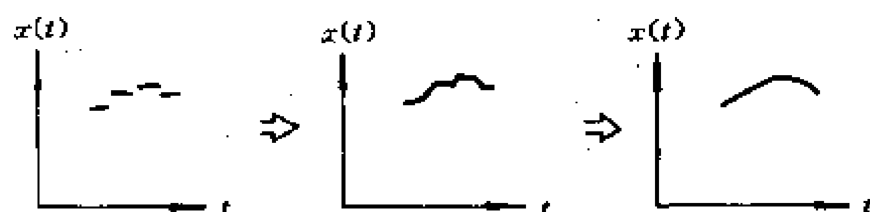


图 16.1 修匀总数曲线

为了说清楚一对相互制约的物种总数的变化情况，我们必须知道每一物种的出生和死亡的某些“规律”。这些规律一般用变化率来表达。比如说我们来看看 x 物种的变化率的规律可能采取什么样的形式。对时间求平均值也好，或者对年龄、对性别、以及对增殖力求平均值也好，x 物种的典型个体对 x 的变化率产生净贡献 r. 这样，全部总数 $x(t)$的变化率为

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=[\text{个体对变化率的贡献}]\times[\text{个体的数目}]=rx(t). \tag{1}$$

自然，**比例系数** r 将随物种的不同而不同，但是，它总是指上述的意思。

要想求得 $x(t)$，就得解方程(1)，而(1)的解又依赖于比例系数 r. 如果 r 是常数，那么 $x(t)$按指数律增长或衰减：$x(t)=x_0e^{rt}$，

但这时与 y 物种根本没有相互作用。既然我们假定了两种物种是相互制约的，那么 r 至少是 y 的函数，当然还可能与 x 有关。在不确切地知道 r 是怎样随 x 和 y 的变化而变化时，我们沿用工程师的格言"拿不准时，就线性化！"，而假设 r 是 x 和 y 的线性函数 $r=a_0+a_1x+a_2y$，其中 $a_i(i=0,1,2)$ 均为常数。

用同样方法，我们可以论述 y 的变化率方程，从而得到**二次总数模型**

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &= (a_0 - a_1x + a_2y)x, \\
\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} &= (b_0 + b_1x + b_2y)y,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

其中 $a_i, b_i(i=0,1,2)$ 均为常数。如果 $a_2=b_1=0$，那么(2)便作为两种物种无相互制约的模型，其中每一个都遵循广义的逻辑律（例如，见[4]或[6，例 3]）。另一方面，如果 $a_1=b_2=0$，(2)就成为 Braun 在[5]中论述的鲨鱼-食用鱼相互制约的 D' Ancona-Volterra 模型了。于是，(2)是一个仍相当复杂的简化模型，它包含了逻辑律，D' Ancona-Volterra，以及指数增长($a_1=a_2=b_1=b_2=0$)等的模型。

现在，我们对出现在这个模型中的常数，给出某些生物学的意义。

自然增长系数：常数 a_0 和 b_0，表示相应的物种在没有任何其他干扰下的自然增长。(2)* 中的 a_0x 和 b_0y 两项，因为它们是自然增长率，就常常称为**生物势**。

单物种群居系数：常数 a_1 量度总数 $x(t)$ 在物种 x 自身增长率上的作用。如果 $a_1<0$，a_1 叫作**自限系数**，量度总数过剩的反作用；如果 $a_1>0$，称它为**互惠共生系数**，表示繁殖力随总数的增大而提

* 原文误为(7)。——校注

高。第一种情况表明，物种 x 的成员之间为了有限的资源在相互**竞争**，而第二种情况，意味着成员之间的**合作**。类似的分析适用于 b_2.

双物种群居系数：系数 a_2 和 b_1 量度一个物种在另一个物种的增长率上所起的作用；它们称为双物种群居系数（或简称为干扰常数）。如果 $a_2b_1\neq0$，有下述几种情况：

1. $a_2>0, b_1>0$，物种之间**互惠共生**的情况，

2. $a_2<0, b_1>0$（或 $a_2>0, b_1<0$），x 是**捕食者** y 的**食物**（或 y 是捕食者 x 的食物），

3. $a_2<0, b_1<0$，**相互捕食**的现象发生，或者也许为共有的资源而**竞争**。

(2) 中的**群居项**（也就是含有群居系数的项）都是二次的；这种项有时称为**集团作用**，表示个体之间的相互制约。也可以说成"使两者跳探戈舞或相互纠缠"。不管怎样，就二次模型来说，纵然它的推导基本上是理论的，但在生物学上却常讲得通。

(2)的解 $x=x(t), y=y(t)$，在 xy 平面上确定了一条以 t 为参数的曲线。这曲线就称为**总数轨道**或**轨线***。因为负总数没有意义，我们只对**总数象限**（$x\geqslant0, y\geqslant0$）中的总数轨道感兴趣，而且特别感兴趣的是**稳定状态轨道**，这种轨道对应于常数或(2)的周期解，而分别地用点或简单闭曲线描绘于总数象限中。看看图 16.2 中假想的几种轨道，C 表示常数，而 P 为周期轨道，轨道上的箭头标志着时间增加的方向。

---

* "轨道"通常表示行星或卫星的椭圆轨迹，而"轨线"表示导弹的路线。然而，在本文中，这些术语指的就是(2)在 xy 平面上任意的解曲线。

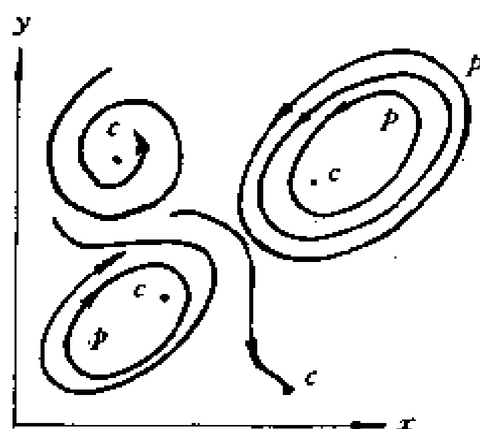


图 16.2 总数的轨道

2. 平衡的总数：无循环

作为各物种间相互制约的模型，我们建立了方程组(2)。我们来看一看，关于可能满足(2)的函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 能说些什么？就是说，(2)的解是什么样子的？在没有关于系数的更多的信息时，要想实际上求出 $x(t)$，$y(t)$ 是 t 的怎样的具体函数来是不可能的。我们用稍为间接的方式来处理。

两种相互制约的物种，在共同的环境中，经过足够长的时间后，完全有可能达到某种平衡，即所谓的**平衡状态**，也许是这样，每一个总数，在经过一定时间后，基本上保持常数：$x(t)\equiv x_0$，$y(t)\equiv y_0$. 在这种情况下，则有 $\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t\equiv 0$，$\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t\equiv 0$，反之，如果物种 x 和物种 y 两者的增长率均恒等于零，则两个总数都是常数。这些常数总数对应于(2)的**临界点**，且可以通过令(2)的右边等于 0，即

$$\begin{cases} x(a_0+a_1x+a_2y)=0 \\ y(b_0+b_1x+b_2y)=0 \end{cases} \tag{3}$$

并一齐解出这两个方程的 x 和 y 而得到。

无论何时，$x=0$ 总满足(3)的第一个方程。如果 $x=0$，那么，$y=0$ 或 $y=-b_0/b_2$（假定 $b_2\neq0$）总能使第二个方程成立。$y=0$ 满足(3)的第二个方程，当 $y=0$ 的时候，那么 $x=0$ 或 $x=-a_0/a_1$（假定 $a_1\neq0$）总能使第一个方程成立。至此，我们确定了三个临界点（也就是常数总数点）：

$$\begin{cases} x=0, y=0, \\ x=0, y=-b_0/b_2, \\ x=-a_0/a_1, y=0. \end{cases}$$

注意到，这三种情况的每一种，都至少有一个物种要灭绝。这很难说成是两个物种间非平凡的长期平衡。因此，我们对于这三点没有什么兴趣。

然而，我们忽略了一个可能的常数总数点。只要括号中的项等于零，方程组(3)也是成立的。解方程组

$$\begin{cases} a_0+a_1x+a_2y=0, \\ b_0+b_1x+b_2y=0, \end{cases}$$

我们就一齐地得到了第四个常数总数点

$$x_0=\frac{a_2b_0-a_0b_2}{a_1b_2-a_2b_1} \qquad y_0=\frac{a_0b_1-a_1b_0}{a_1b_2-a_2b_1}, \tag{4}$$

只要 $a_1b_2\neq a_2b_1$。

于是，如果两种物种实际上是按下述方式相互制约的，即(2)是一个精确的模型，而且长时期内，二者保持为非零常数，那么，两个总数一定由(4)给出。注意到，只有当 $x_0>0$ 和 $y_0>0$（就是说，(x_0,y_0) 位于总数象限内）的时候，由(4)给出的临界点才表示一个真实的总数状态。

可是，存在着可以想象得到的、由两种相互制约的物种实现的、另一类简单的平衡状态。可能发生这样的情况：没有一种物种的总数随时间的推移保持常数，而是周期地变动的。这样，$x(t)$ 和 $y(t)$ 是时间 t 的具有公共周期的非常数的周期函数了。相应的总

数轨道称为一个**循环**[见图 16.2]，这种循环特性的可能性已经成为生物学和生态学领域近来争论得最多的题目[13],[14]。我们不想多谈生物学或生态学的理由以使人们相信相互制约物种的特定系统存在还是不存在循环性平衡。但是，我们要指出，形如(2)的方程组"几乎没有"可能具有循环。("几乎没有"的意思，在后面阐述。)

我们先给方程组(2)的系数加上两个条件。

条件(A)：$A=a_1b_2-a_2b_1$ 不为零。

条件(B)：$B=a_1b_0(a_2-b_2)-a_0b_2(a_1-b_1)$不为零。

条件(A)断言了两直线

$$\begin{cases} a_0 + a_1x + a_2y = \text{常数} \\ b_0 + b_1x + b_2y = \text{常数} \end{cases}$$

不是平行的。平行性所反映的模型中两个物种的比率系数之间的精确关系几乎是不可能的。

条件(B)没有一个简单的解释，但是 $B=0$ 时，在一定条件下，有一个简单的推论：如果果然有一个循环存在，那么就有连续的循环区域存在(见这章后面部分的 D'Ancona-Volterra 模型)。但是，如果(2)被当作某真实系统的模型，那么，数 B 等于零是不合理的。因为在这种情况下，常数 a_0,a_1,a_2,b_0,b_1 和 b_2 都只是近似的，而要求 $B=0$，实际上是不可能的。这样的条件(A)和(B)，大概会在我们有理由相信(2)是它的正确模型的任一个系统中满足。我们有下面的核心结果。

无循环定理 *如果二次总数模型(2)的系数满足条件(A)和(B)，那么，(2)在总数象限中没有循环。*

注 无论被用来模拟的两种物种的最终结果会怎样，只要满足条件(A)和(B)，它们就决不能确定一个非常数的周期平衡(即循环)。

证明 对于 $x>0$ 和 $y>0$，定义函数

$$K(x,y) = x^{\alpha}y^{\beta},$$

其中

$$\alpha=\frac{b_2(b_1-a_1)}{A}-1 \qquad \beta=\frac{a_1(a_2-b_2)}{A}-1$$

设 f 和 g 分别表示(2)的两个变化率方程式的右边，并考虑函数

$$\frac{\partial}{\partial x}(Kf)+\frac{\partial}{\partial y}(Kg).$$

经直接计算(练习 4)可以证明，不管 $B=0$ 与否，只要 $A\neq 0$，就有

$$\frac{\partial}{\partial x}(Kf)+\frac{\partial}{\partial y}(Kg)=\frac{B}{A}K. \tag{5}$$

今假定在总数象限内，(2)确实有一个循环 Γ，我们将导出矛盾，以此证明没有循环。设 R 表示 Γ 和 Γ 内部的并集(见图16.3)。由于当 $x>0,y>0$ 时 $K(x,y)>0$，且根据条件(A)和(B)可知，A 和 B 均为非零常数，于是量 $(B/A)K(x,y)$ 在总数象限内有确定的符号且不为零。根据(5)，可得

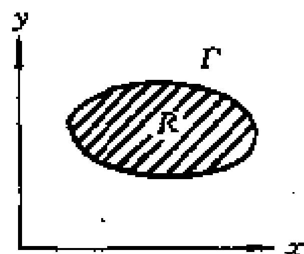


图 16.3　循环 Γ 和域 R

$$0\neq\iint_R \frac{B}{A}K(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(Kf)+\frac{\partial}{\partial y}(Kg)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{6}$$

$$\iint_R\left[\frac{\partial}{\partial x}(Kf)+\frac{\partial}{\partial y}(Kg)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_\Gamma[Kg\mathrm{d}x-Kf\mathrm{d}y]. \tag{7}$$

因为 Γ 是轨道，所以沿 Γ 有 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f$ 及 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=g$，因此(7)中的线积分为零，这是因为

$$\begin{aligned}&\oint_\Gamma[Kg\mathrm{d}x-Kf\mathrm{d}y]\\&=\int_0^T\left[Kg\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-(Kf)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right]\mathrm{d}t\\&=\int_0^T[Kgf-Kfg]\mathrm{d}t=0,\end{aligned} \tag{8}$$

其中 T 为循环 Γ 的周期。从(6)—(8)得

$$0 \neq \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(Kf) + \frac{\partial}{\partial y}(Kg)\right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

这说明,(2)有循环的假设是没有根据的,从而证明了无循环定理。

于是,当条件(A)和(B)成立时,由(2)作为模型的一对非零物种的唯一可能的平衡状态,就是由(4)给出的常数总数状态。

3. D′ Ancona-Volterra 模型:完全循环

物种间相互制约的最有名的模型,是关于生活在亚得里亚海的鲨鱼和食用鱼的 D′ Ancona-Volterra 模型。在第 15 章中,Braun 已经给出了关于这个模型的令人高兴的和详尽的叙述,我们只是概述一下他的成果。鲨鱼群体 y 以另一种鱼 x 为食。在 x 缺乏的情况下,鲨鱼总数的生物势是负的,且 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t<0$,而当 y 缺乏时,被捕食者的势是正的,且 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t>0$. 相互制约与 xy 成正比,且对鲨鱼有利,而不利于作为食物的物种。在这些条件下,D′ Ancona-Volterra 的捕食者-被捕食者模型,有如下形式

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(a - by) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(-c + dx), \end{cases} \tag{9}$$

其中所有的常数都是正的。将(9)的两个方程相除,得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y(-c + dx)}{x(a - by)},$$

分离变量,得

$$\frac{a - by}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-c + dx}{x},$$

积分之,得

$$a\ln y - by + c\ln x - dx = K_1, \tag{10}$$

其中 K_1 是积分常数，我们求得了在 xy 平面上总数象限内的轨道。方程(10)确定了在总数象限内的一族轨道，正如 Braun 证明的，除了常数总数点($c/d, a/b$)以外，每一条轨道都是一个循环。关于这些循环的示意图，见图 16.4.

循环?怎么会有循环呢?无循环定理不是断定根本就没有循环吗? 蹊跷就在于定理的假设。只要 A 和 B 均非零，就没有循环存在，然而，在 D'Ancona-Volterra 模型中，经简单计算就可证得 $B=0$(尽管 $A\neq 0$)。于是，无循环定理不适用于(9)，这是因为假设之一不成立。

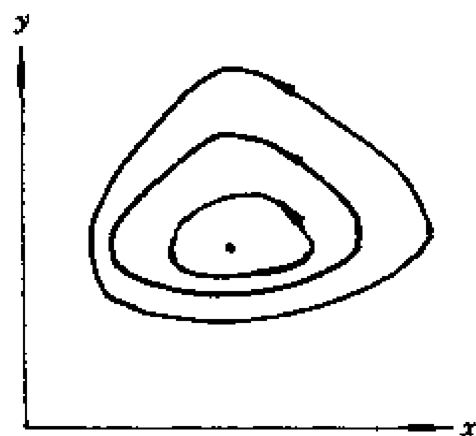


图 16.4 D'Ancona-Volterra 循环

不仅模型中有很多循环，而且已经知道，在任一个二次模型中，如果 $A=0$，或 $B=0$，或二者都为零，以及存在一个循环，那么，就有无限多个循环存在，并且它们完全填满总数象限中的某个区域或象限本身。从而，二次总数模型或是循环的"节日"，或是循环的"饥荒"。不可能存在孤立的循环(也就是极限环)。关于所有这些结果的证明，见 van der Vaart[15]。

4. 稳 定 性

生物学的循环，持续相当一段时间之后，必然几乎不受"现实世界"不可避免的冲击和扰动的影响。也就是说，如果一个扰动在时刻 t_1 突然地使一个总数点 p 自 Γ 偏离到附近的点 q 上，而后扰动随即停止，那么，随着时光的流逝，时刻 t_1 在 q 处的轨道就向 Γ

移回。这样的循环就是**生态稳定**(见图16.5)。(关于它的数学术语是**渐近轨道稳定性**,在此我们不打算给出它的形式定义了。)看来,自然界中可能存在的真实的总数循环只能是那些生态稳定的。

第3节中的D′Ancona-Volterra循环,不是生态稳定的。因为一个突然的冲击,可驱使一个总数点p自循环Γ偏离到一个完全不同的循环Γ_1上。自然,一旦在Γ_1上,总数便保留在那里,除非有另一个冲击把总数点又送到另一个循环上。不管怎样,返回到原来的循环上是不太可能的(见图16.6)。于是,生态稳定循环一定是**孤立的**,就是说,没有其他循环在"近傍"。正如我们早些时候指出的,二次总数模型不可能有孤立的循环,从而也不可能有生态稳定循环。这是否意味着二次模型中没有一个能对模拟波动总数的情形有用呢?

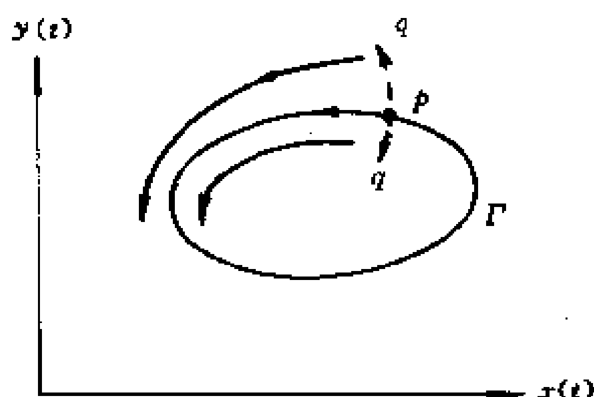


图16.5 生态稳定循环

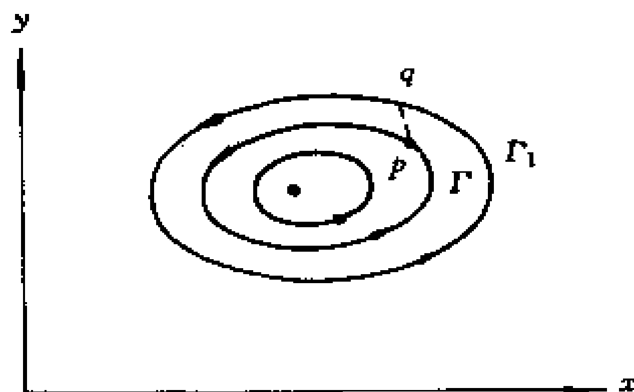


图16.6 D′Ancona-Volterra循环不是生态稳定的

5. 哪一个模型?

D′ Ancona-Volterra 模型的循环不可能是生态稳定的，但这不是扔掉模型的理由。相反，应该把(9)及其轨迹看作是过分简化了的事态的真实情况，而不应该将注意力集中于捕食者-被捕食者相互制约的振荡性质上。A. Winfree 在模拟另一类自然界的循环时，引述了毕加索的话：

> 艺术是帮助我们认识真理的谎言。

接着 Winfree 说：

> 在我们这里，所谓的艺术，就是打算用简单方程来突出复杂现实的有关本质。

D′ Ancona-Volterra 模型是鲨鱼-食用鱼群循环的一幅粗线条画：是印象而不是肖像。尽管某些细节失真了，而别的一些甚至完全被遗漏了，我们还是不仅认清了这幅画的主题，而且是以一种新的和揭示性的方法去领会它的。

在二次总数模型范围内，对于这幅画，我们可以添加更多的细节。我们可以计入自限项而得到

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x(a - \alpha x - by), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = y(-c + dx - \beta y), \end{cases} \tag{11}$$

其中自限系数 α 和 β 是正的且都比 a、b、c、d 小。这不是 D′ Ancona-Volterra 模型，而且常数 B 不再为零，A 亦然*。纵然无循环定理适用，而且(11)没有循环，可是，既然 α 和 β 较小，那就至少对于有界的 x 和 y，它仍然“接近”于 D′ Ancona-Volterra 模型。当变化率

---

* $B = \alpha c(-b+\beta) + \alpha\beta(-a-d) = -[\alpha bc + \alpha\beta a + \beta ad] + \alpha\beta c$，当 $\alpha\beta$ 充分小时，它小于 0. $A = \alpha\beta + bd > 0$.

方程只作稍微改动时，轨道仅有少许变化，因而(11)的轨道接近于(9)。假定我们在"靠近"(9)的平衡点$(c/d,a/b)$处选取一个总数点(x_0,y_0)，且围绕$(c/d,a/b)$跟踪(9)的轨道通过(x_0,y_0)一次，那么，这轨道会准确地返回到(x_0,y_0). 让我们再从(x_0,y_0)开始，但这次却追随(11)的轨道转整整的一圈。当(11)的轨道返回到(x_0,y_0)

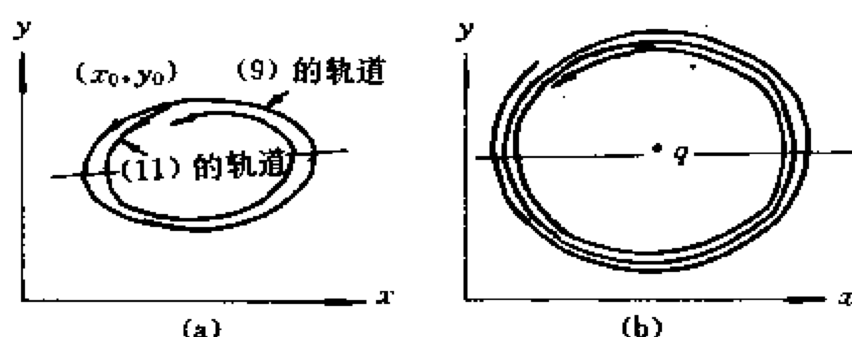


图 16.7 (a)(9)和(11)的轨道；(b)(11)的螺旋形轨道

(这恰好是未到达的点)的近旁时，它靠里面滑行而过(见图16.7)。这种特性，在下一次以及再下一次等等转圈时，重复出现。轨道的接连转动形成一个紧密地绕成的螺旋线，而这些螺旋线的路径慢慢地靠近平衡点*。

当α和β都较小而(x_0,y_0)接近于平衡点时，螺旋形轨道向内迁移是如此微小，以致对观察者来说，这轨道似乎是一个循环。于是，(11)仍能描述在鲨鱼-鱼群落中看到的捕食者-被捕食者总数的波动，不过，这系统没有 Lotka-Volterra 模型的生态不稳定循环。自然，必须为下述的附加说明付出代价：我们不再有关于(11)的轨迹公式，因为积分(10)只适用于 D' Ancona-Volterra 模型。

比较起来看，以哪一个模型为好？不存在有头等的理由去选择

* (11)的轨道具有这种成螺旋形特征的证明省略了。有兴趣的读者，为了这样一个证明所需要的那类分析的指示，可以读本卷中的 Braun 模型[3]。

某一个，因为每一个都深化了我们对被描述的自然现象的了解，只不过方法不同而已。

练　　习

1. 求微分方程组 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = a_2xy$，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = b_1xy$（其中 $a_2 \neq 0$，$b_1 \neq 0$）的轨道。证明，即使 $B=0$，也不存在循环。按生物学解释这个方程组。提示：考察 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$.
2. 求微分方程组 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t = x(a_0 + a_2y)$，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = b_0y$（其中 a_0，a_2 和 b_0 均不为零）的轨道。提示：求 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ 再分离变量。按生物学作解释。无循环定理适用吗？
3. 证明，三次系统

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = (1 - x^2 - y^2)x - y, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = (1 - x^2 - y^2)y + x$$

有唯一的生态稳定孤立循环。但是，请注意，这系统不是相互制约物种间的模型。为什么不是？提示：用极坐标 $r = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}$，$\tan\theta = y/x$，从而证明 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t = r(1 - r^2)$，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = 1$. 接着通过分离变量求 $r(t)$. $r\equiv1$ 即为所求的孤立循环。

4. 验证(5)。（你务必稍微小心地讨论 $\alpha=-1$，$\beta=-1$ 的情况。）
5. （也见[5]）。

a）设(2)在总数象限中，有一个由周期为 T 的参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$ 确定的循环 Γ. 证明沿 Γ 的平均总数

$$\bar{x} = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)\mathrm{d}t \text{ 和 } \bar{y} = \frac{1}{T}\int_0^T y(t)\mathrm{d}t$$

由 $x=x_0$，$y=y_0$ 给出，其中 (x_0, y_0) 是由(4)给出的常数平衡总数。假定 $A \neq 0$ 且 $x_0 > 0$，$y_0 > 0$.

提示：$(1/x)(\mathrm{d}x'\mathrm{d}t) = a_0 + a_1x + a_2y$，

$$\frac{1}{T}\int_0^T \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t\ \frac{1}{T}\int_0^T (a_0 + a_1x(t) + a_2y(t))\,\mathrm{d}t = a_0 + a_1\bar{x} + a_2\bar{y}.$$

但是 $\int_0^T (1/x)(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)\mathrm{d}t = \ln x(T) - \ln x(0) = 0$，这是因为 $x(t)$ 有周期 T. 类似地，可证得 $0 = b_0 + b_1\bar{x} + b_2\bar{y}$.

b）假设具有自限项的捕食者-被捕食者模型(11)有循环且 $\beta<b$. 再假定两种物种都按正比于各自总数的速度被“收割”：这样，(11)中的常数 a 和 $-c$ 就得分别地用 $a-h$ 和 $-c-h$ 来代替了。又假设收割模型也有循环。利用 a）证明，在有收割的时候，被捕食者物种 x 的平均总数，沿循环增加，而捕食者物种 y 的平均总数减少。

c) 假设蚜虫为被捕食者而瓢虫为捕食者。你会用广谱杀虫剂去杀死蚜虫吗？试解释之。

6. (Bendixson 准则的一般化)设 R 为平面中的一个区域，假定 $K(x,y)$ 为 R 上的一个连续函数。再假定 $(\partial/\partial x)(Kf)+(\partial/\partial x)(Kg)$ 在 R 上有固定的符号[在 R 上决不为零]。证明系统 $dx/dt=f(x,y)$, $dy/dt=g(x,y)$ (其中 f 和 g 均在 R 上连续)，在 R 内没有循环。提示：仿无循环定理的证明。

参 考 文 献

[1] F. Albrecht, H. Gatzke, A. Haddad and N. Wax, "The Dynamics of two interacting populations," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 46, pp. 658—670, 1974. A research paper which gives a complete analysis of the general system, $\dot{x}=xf$, $\dot{y}=yg$, with various conditions appropriate to population dynamics imposed on f and g. Little discussion of the biological or ecological meaning.

[2] M. Braun, *Differential Equations and Their Applications*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1978. This is one of the best books on the sophomore level; the presentation of the applications is especially good. Several of the sections of the book are also included in this volume.

[3] ——, "The principle of competitive exclusion in population biology," this volume, ch. 17. Braun presents a careful study from a mathematical point of view of a basic ecological principle, essentially the same as a section in [2].

[4] ——, "Single species population model," this volume, ch. 5. This is a good presentation of exponential and of logistic growth and also appears as a section in [2].

[5] ——, "Why the percentage of sharks caught in the Mediterranean Sea rose dramatically during World War Ⅰ," this volume, ch. 15. This is a slight alteration of a section of [2] and contains a good exposition of the D' Ancona-Volterra model.

[6] C. S. Coleman, "Biological cycles and the fivefold way," this volume, ch. 18. This introduces the lynx-hare cycle and the Poincare-Bendixson theory of limit sets. The Kolmogorov theorem on biological cycles is also discussed.

[7] W. A. Coppel, "A survey of quadratic systems," *J. Differential Equations*, vol. 2, pp. 293—304, 1966. An advanced monograph surveying what was known

about such systems up to 1965, this contains a veriety of the No Cycle therem and presents a variety of curiosa about quadratic systems; e. g. , any cycle must bound a convex region.

[8] D. L. De Angilis, "Estimates of predator-prey limit cycles," *Bull. Math. Bio.*, vol. 37, pp. 291—299, 1975. A predator-prey system with a unique cycle which is ecologically stable is discussed. The rate equation for the prey is cubic, for the predator linear.

[9] L. B. Keith, *Wildife's Ten-Year Cycle*, Madison: Univ. of Wisconsin Press, 1963. An intriguing, non-mathematical discussion of the evidence concering the famous 10-year cycle of lynx, hare, grouse, and other populations in the Canadian coniferous forests.

[10] E. J. Kormondy, *Concepts of Ecology*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1969. This elementary text-book covers, among many other things, interacting species in a nonmathematical way.

[11] D. L. Lack, *The Natural Regulation of Animal Numbers*. Oxfords Clarendon Press, 1954. Other forms for mathematical models of interacting species are discussed.

[12] R. M. May, "Limit cycles in predator-prey communities," *Science* vol. 177, pp. 900—902, 1972. A readable discussion of the subject is given with extensive references.

[13] ——, *Stability and Comilexity in Model Ecosystems*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973. This excellent text is accessible to sophomores or juniors willing to think deeply. A moderate amount of differential equations is used. Particularly good differential equations is used. Particularly good discussions of the ecological implications are given. with a very good bibliography.

[14] J. Maynard Smith, *Models in Ecology*. Cambridge, 1974. Comments similar to those for May's book apply. The analysis of differential equations is mostly heuristic and geometric, good bibliography.

[15] H. R. van der Vaart, "The phase portrait of differential systems of Volterra type," *Bull. Math. Bio.*, vol. 40, pp. 133—160, 1978. Corrects and extends the analysis in Coppel [7] on cycles of quadratic population models.

[16] B. H. West, "Setting up first-order differential equations from word problems," this volume, ch. 1. It is an excellent. student-oriented presentation.

教 师 参 考

目的 前一章 Braun 证明了，捕食者-被捕食者相互制约的 D′ Ancona-Volterra 模型中的所有总数轨道都是闭曲线或循环。在本章中，证明了“大量的”二次总数模型根本没有循环。偏巧，有循环的模型和没有循环的模型，两者都能用来描述捕食者-被捕食者群落的波动。这个明显的矛盾在本章的最后一节解决了。不过，文章基本上是独立的和自圆其说的，作为关于 D′ Ancona-Volterra 模型研究的补充，它有其固有的位置。

预备知识 一些熟悉的非线性微分方程，平面中的 Green 定理。

时间 如果学生已经熟悉 D′ Ancona-Volterra 模型，这些材料够讲一次课。

第 17 章

群体生物学中的竞争排斥原理

Martin Braun *

在自然界中经常可观察到，两种相类似的群体之间，为了相同的有限的食物资源和活动空间而对抗的生存竞争，直至群体之一完全灭亡了才告结束。这种现象称为“竞争的排斥原理”，于 1859 年由达尔文用稍许不同的形式首先阐明的。他在他的论文“*The origin of species by natural selection*”中写道：

“同一种类的各个群体，一般(尽管决不是总这样)在习性、身体素质直至结构性上都有许多相似的地方，如果它们相互竞争起来，斗争常常会比不同种类的群体之间的要激烈得多。”

对于竞争排斥原理，有一个非常有趣的生物学的解释。这理论的基石是“生态龛”这概念。生态龛表示一个已知群体在群落中占有怎样的地位，就是说，它的习性、食物和生活习惯是什么。已经看到，两个同类的群体竞争的结果，难得占有同一个生态龛。相反，每个群体都有优于对手的各种食物和生活习惯。如果两个群体力图占有同一个生态龛，那么它们之间的生存竞争将是激烈的，且以弱者的灭亡而告终。

* Department of Mathematics, Queens Collge, Flushing, NY11367.

这个理论的一个极好的实例，是栖居于黑海中 Jorilgatch 岛上的燕鸥群体。这群体由四种不同种类的燕鸥（白嘴端(sandwich)燕鸥，普通燕鸥，黑喙燕鸥和小燕鸥）组成。这四种鸟联合起来把捕食者从群体中赶跑。不过，就怎样得到食物来说，它们之间存在着明显的差别。白嘴端燕鸥远远地飞到公海上去猎食某种生物，黑喙燕鸥仅仅靠陆地为生；而普通燕鸥和小燕鸥在靠近海岸的地方捕鱼，它们边飞边对鱼进行瞄准并潜入水中。小燕鸥在低湿的浅水捉鱼，而普通燕鸥则在离岸较远的地方猎取食物。这样，一起生活在单独小岛上的这四种类似的燕鸥，它们的给食方式和获得食物方面都明显不同。它们的每一种都有一个明显优于对手的生态龛。

本节，我们为竞争排斥原理提供一个严格的数学论证。这将通过下述步骤来完成，先导出一个微分方程组（它控制着两个类似的物种之间的相互制约），接着证明这方程组的每一个解趋近于两个物种之一灭亡了的平衡状态。

在建立两个竞争物种之间生存竞争的数学模型时，再考察一下总数增长的逻辑规律

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=aN-bN^2 \tag{1}$$

是有启发性的。这个方程控制着其成员为了活动空间和有限量的食物而自身间进行竞争的单独一个物种的总数 $N(t)$ 的增长。回想一下第 5 章中所说的，当 t 趋于无穷时，$N(t)$ 趋于极限总数 $K=a/b$ 这个极限总数可以认为是这个小天地可承受的物种的最大总数。利用 K，逻辑规律(1)可以重新写成为

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=aN\left(1-\frac{b}{a}N\right)=aN\left(1-\frac{N}{K}\right)=aN\left(\frac{K-N}{K}\right). \tag{2}$$

方程(2)有如下有趣的解释。当某总数 N 非常少时，按马尔萨斯律 $\mathrm{d}N/\mathrm{d}t=aN$ 增长。aN 项称为物种的“生物势”。它是在理想条件下，物种的可能增长率，只要对食物和活动空间不加以限制，

且物种的各个成员不排泄任何有毒的废物，这种增长率是可以实现的。可是，当总数增加时，生物势随着因子$(K-N)/K$而减小，这因子是还空着的位置在小天地中的相对数，生态学家称它为增长的环境阻力。

今设$N_1(t)$和$N_2(t)$分别为物种1和2在时刻t时的总数。再设K_1和K_2为小天地里所能承受的物种1和2的最大总数。又设a_1N_1和a_2N_2为物种1和2的生物势。那么，$N_1(t)$和$N_2(t)$满足微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=a_1N_1\left(\frac{K_1-N_1-m_2}{K_1}\right),$$
$$\frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t}=a_2N_2\left(\frac{K_2-N_2-m_1}{K_2}\right), \tag{3}$$

其中m_2为第二个物种占据第一个物种的位置的总数，m_1为第一个物种占据第二个物种的位置的总数。初看起来，好像会出现$m_2=N_2$和$m_1=N_1$的情况。然而，这不是通常的情形，因为两个物种以同样方式利用环境几乎是不可能的。有相同个数的物种1和2，平均来说，不会消耗等量的食物，占有相同大小的活动空间，以及排泄同样多有相同化学成分的废物。一般地，我们应该置$m_2=\alpha N_2$，$m_1=\beta N_1$，其中α，β是某些常数。常数α和β表示这一个物种对另一个的影响程度。如果两个物种的利益不相冲突，且它们占有生态龛是分开的，则α和β两者都为零。如果两种物种占据同一个生态龛，彼此又十分相似的话，那么，α和β就很接近于一。另一方面，如果物种之一，比如说物种2，徒然地浪费环境，也就是说，消耗大量的食物和排泄有毒的废物，那么，物种2的一个个体将占有物种1的许多个体的位置。于是，在这种情况下，系数α就很大。

现在，我们作这样的限制：即两个物种差不多相同，且要求同样的生态龛。那么$\alpha=\beta=1$，，且$N_1(t)$和$N_2(t)$满足微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t}=aN_1\left(\frac{K_1-N_1-N_2}{K_1}\right),$$

$$\frac{dN_2}{dt} = a_2N_2\left(\frac{K_2 - N_1 - N_2}{K_2}\right). \qquad (4)$$

在这种情况下，我们可以预料得到，物种 1 和 2 之间的生存竞争将是激烈的，且在物种之一灭亡的情况下结束。我们马上就要证明，情况确是如此。

定理 （竞争排斥原理）假设 K_1 比 K_2 大。那么，(4)的每个解，$N_1(t)$，$N_2(t)$，当 t 趋于无穷时，趋于平衡解 $N_1=K_1$，$N_2=0$. 换句话说，如果物种 1 和 2 差不多相同，且小天地能够承受的物种 1 的成员比物种 2 的成员还多，那么，物种 2 终究将灭亡。

证明的第一步是先证 $N_1(t)$和 $N_2(t)$均非负。为此目的，注意到

$$N_1(t) = \frac{K_1N_1(0)}{N_1(0) + (K_1 - N_1(0))e^{-a_1t}}, \quad N_2(t) = 0$$

是(4)的解，其中 $N_1(0)$是任意选定的。这个解在 N_1-N_2 平面上的轨道是：当 $N_1(0)=0$ 时，为点$(0,0)$；当 $0<N_1(0)<K_1$ 时，为线 $0<N_1<K_1$，$N_2=0$；当 $N_1(0)=K_1$ 时，为点$(K_1,0)$；而当 $N_1(0)>K_1$ 时，为线 $K_1<N_1<\infty$，$N_2=0$. 于是，当 $N_1\geqslant 0$ 时，N_1 轴为(4)的四条不同轨道的并集。类似地，当 $N_2\geqslant 0$ 时，N_2 轴也是(4)的四条不同轨道的并集。这意味着从 N_1-N_2 平面的第一象限($N_1>0$，$N_2>0$)开始的(4)的解，对于将来的时刻，所有的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$必须保持在第一象限内。

证明的第二步是，把第一象限分割成在其上 dN_1/dt 和dN_2/dt 都有固定符号的若干个区域。这可用下述方法完成。设 l_1 和 l_2 分别为直线 $K_1-N_1-N_2=0$ 和 $K_2-N_1-N_2=0$. 注意到，如果(N_1,N_2)位于 l_1 之上方，则 dN_1/dt 是负的；如果(N_1,N_2)位于 l_1 之下方，则 dN_1/dt 是正的。类似地，如果(N_1,N_2)位于 l_2 之上方，则 dN_2/dt 是负的。如果(N_1,N_2)位于 l_2 之下方，则 dN_2/dt 是正的。于是，两平行线 l_1 和 l_2 把 N_1-N_2 平面的第一象限分为三个区域

(见图 17.1)，在这些区域中，dN_1/dt 和 dN_2/dt 都有固定的符号。在区域Ⅰ中，$N_1(t)$和 $N_2(t)$都随时间 t(沿(4)的任一个解)的增加而增加；在区域Ⅱ中，随着时间的增加，$N_1(t)$在增加，而 $N_2(t)$却在减少；在区域Ⅲ中，$N_1(t)$和 $N_2(t)$都随时间的增加而减少。最后，我们需要下述的三个简单引理。

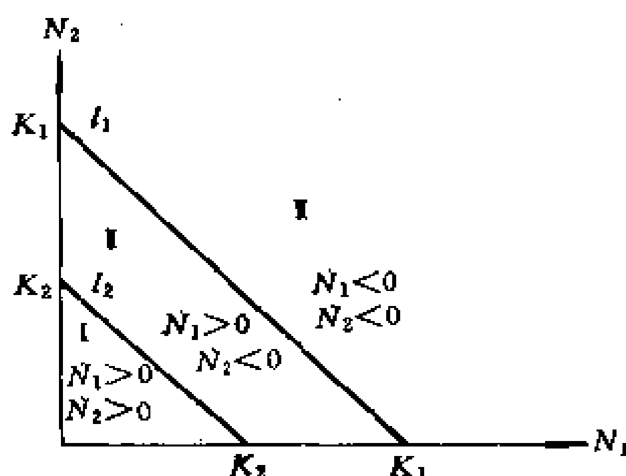


图 17.1

引理 1 *任何一个在 $t=t_0$ 时由区域Ⅰ开始的(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，在某个时刻之后必定离开这个区域。*

证明 假设对于所有 $t\geqslant t_0$ 的时刻，(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$保持在区域Ⅰ中。这意味着，$N_1(t)$和 $N_2(t)$当 $t\geqslant t_0$ 时都是时间的单调增加函数，同时 $N_1(t)$和 $N_2(t)$都比 K_2 小。因此，当 t 趋于无穷时，$N_1(t)$和 $N_2(t)$分别有极限 ξ 和 η. 反过来，这意味着(ξ,η)为(4)的一个平衡点。可是，(4)的平衡点只有(0,0)，$(K_1,0)$和$(0,K_2)$，而(ξ,η)明显不可能重合于这三个点中的任一个。因而，我们断定，(4)的任何一个从区域Ⅰ开始的解，$N_1(t)$，$N_2(t)$，在较后的时刻必定离开这个区域。

引理 2 *任何一个在 $t=t_0$ 由区域Ⅱ开始的(4)的解 $N_1(t)$，*

$N_2(t)$，对于 $t \geqslant t_0$ 的一切未来时刻，将保持在这个区域内，且终究要趋于平衡解 $N_1 = K_1$，$N_2 = 0$.

证明 假设(4)的一个解 $N_1(t)$，$N_2(t)$在时刻 $t = t^*$ 时离开区域Ⅰ. 那么，不是 $N_1(t^*)$就是 $N_2(t^*)$等于零，这是因为(4)的解可以离开区域Ⅱ的仅有的路线要穿过 l_1 或 l_2. 假设 $N_1(t^*) = 0$. 关于微分(4)的第一方程两边，再令 $t = t^*$，得

$$\frac{d^2 N_1(t^*)}{dt^2} = \frac{-a_1 N_1(t^*)}{K_1} \frac{dN_2(t^*)}{dt}.$$

这个量是正的。因此 $N_1(t)$在 $t = t^*$ 处有一个极小值。然而，这是不可能的，因为(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$在区域Ⅱ中时，$N_1(t)$一定是递增的。类似地，如果 $N_2(t^*) = 0$，那么

$$\frac{d^2 N_2(t^*)}{dt^2} = \frac{-a_2 N_2(t^*)}{K_2} \frac{dN_1(t^*)}{dt}.$$

这个量是负的，意味着 $N_2(t)$在 $t = t^*$ 处有一个极大值——但是，这是不可能的，因为(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$在区域Ⅱ中时，$N_2(t)$是递减的。

上述的讨论证明了，(4)的在时刻 $t = t_0$ 时于区域Ⅱ开始的任何一个解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，对于所有的未来时刻 $t \geqslant t_0$，将保留在区域Ⅱ中。这意味着，当 $t \geqslant t_0$ 时，$N_1(t)$是单调递增的，而 $N_2(t)$是单调递减的，且 $N_1(t) < K_1$，$N_2(t) > K_2$. 因此，当 t 趋于无穷时，$N_1(t)$和 $N_2(t)$分别地有极限 ξ 和 η. 这同样也意味着(ξ, η)是(4)的一个平衡点。可是，(ξ, η)明显地不等于$(0, 0)$或$(0, K_2)$，从而$(\xi, \eta) = (K_1, 0)$。于是证明了引理2。

引理3 (4)的在时刻 $t = t_0$ 时于区域Ⅲ开始、且对于一切未来的时刻还保留在那里的任一个解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，当 t 趋于无穷时，必定趋于平衡解 $N_1(t) = K_1$，$N_2(t) = 0$.

证明 如果当 $t \geqslant t_0$ 时，(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$保留在区域Ⅲ中，那么，当 $t \geqslant t_0$ 时，$N_1(t)$和 $N_2(t)$都是单调递减函数，且

$N_1(t)+N_2(t)>K_1$. * 因此，当 t 趋于无穷时，$N_1(t)$ 和 $N_2(t)$ 分别有极限 ξ,η. 这同样也意味着 (ξ,η) 是(4)的一个平衡点。可是，(ξ,η) 明显地不等于 $(0,0)$ 或 $(0,K_2)$，从而 $(\xi,\eta)=(K_1,0)$。

定理的证明 引理 1 和引理 2 表明，(4)的在时刻 $t=t_0$ 于区域 Ⅰ 或 Ⅱ 开始的每一个解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，当 t 趋于无穷时，一定趋于平衡解 $N_1=K_1$，$N_2=0$. 类似地，引理 3 证明了，(4)的在时刻 $t=t_0$ 于区域 Ⅲ 开始的、且在一切未来时刻仍保留在那里的每一个解也必趋于平衡解 $N_1=K_1$，$N_2=0$. 其次，注意到(4)的在 l_1 或 l_2 上开始的任一个解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，以后必定直接进入区域 Ⅱ. 最后，如果(4)的解 $N_1(t)$，$N_2(t)$ 离开区域 Ⅲ，那么，它必定穿过直线 l_1 后直接进入区域 Ⅱ. 于是，引理 2 迫使这种解趋于平衡解 $N_1=K_1$，$N_2=0$.

本定理处理了相同物种(即 $\alpha=\beta=1$)的情况。用类似的分析(见练习 4—6)，对于 α 和 β 的各种值，我们可以预言生存竞争的结局。

练 习

1. 把方程组(4)写成

$$\frac{K_1}{a_1N_1}\frac{dN_1}{dt}=K_1-N_1-N_2,\quad \frac{K_2}{a_2N_2}\frac{dN_2}{dt}=K_2-N_1-N_2.$$

那么，将这两个方程相减，再积分，直接得出：对于满足 $N_1(t)>0$ 的(4)的所有解 $N_1(t)$，$N_2(t)$，都有 $N_2(t)$ 趋于零。

2. 微分方程组

$$\frac{dN_1}{dt}=N_1[-a_1+c_1(1-b_1N_1-b_2N_2)],$$

(*)

$$\frac{dN_2}{dt}=N_2[-a_2+c_2(1-b_1N_1-b_2N_2)]$$

---

* 原文误为“$N_1(t)>K_1$ and $N_2(t)>K_1$”。——校注。

是两个物种为了共同的有限资源而竞争的模型。假定 $c_1>a_1, c_2>a_2$ 试导出：如果 $a_1c_2>a_2c_1$，则 $N_1(t)$ 终究要趋于零；如果 $a_1c_2<a_2c_1$，则 $N_2(t)$ 终究要趋于零。

3. 1926 年，Volterra 提出的两个物种为共同的有限的食物来源而竞争的模型如下：

$$\frac{dN_1}{dt} = [b_1 - \lambda_1(h_1N_1 + h_2N_2)]N_1,$$

$$\frac{dN_2}{dt} = [b_2 - \lambda_2(h_1N_1 + h_2N_2)]N_2.$$

假定 $b_1/\lambda_1>b_2/\lambda_2$.（系数 b_i/λ_i 称为物种 i 对于食物不足的敏感度。）证明当 $N_1(t_0)>0$ 时，物种 2 终究要灭亡的。

练习 4～6 与方程组

$$(*)\ \frac{dN_1}{dt} = \frac{a_1N_1}{K_1}(K_1 - N_1 - \alpha N_2)$$

$$\frac{dN_2}{dt} = \frac{a_2N_2}{K_2}(K_2 - N_2 - \beta N_1)$$

有关。

4. a) 假设 $K_1/\alpha>K_2, K_2/\beta<K_1$. 证明，对于（$*$）在条件 $N_1(t_0)>0$ 下的每一解 $N_1(t), N_2(t)$，当 t 趋于无穷时，$N_2(t)$ 趋于零。

   b) 假设 $K_1/\alpha<K_2, K_2/\beta>K_1$. 证明，（$*$）的当 $N_2(t_0)>0$ 的每一个解 $N_1(t), N_2(t)$，$N_1(t)$ 都趋于无穷。提示：作直线 $l_1: N_1+\alpha N_2=K_1$ 和 $l_2: N_2+\beta N_1=K_2$，再仿照定理的证明。

5. 假设 $K_1/\alpha > K_2, K_2/\beta > K_1$. 证明，在 $N_1(t_0)$ 和 $N_2(t_0)$ 都是正的条件下，（$*$）的一切解 $N_1(t), N_2(t)$，终究要趋于平衡解

$$N_1 = N_1^0 = \frac{K_1 - \alpha K_2}{1 - \alpha\beta} \qquad N_2 = N_2^0 = \frac{K_2 - \beta K_1}{1 - \alpha\beta}.$$

提示：

a) 作直线：$l_1: N_1+\alpha N_2=K_1, l_2: N_2+\beta N_1=K_2$. 这两条线把第一象限分为四个区域（见图 17.2），在每一个区域内，N_1 和 N_2 都有固定的符号。

b) 证明，由区域 I 或者 II 开始的（$*$）的一切解，必定仍保留在这些区域中，且终究要趋于平衡解 $N_1=N_1^0, N_2=N_2^0$.

c) 证明，对于一切时刻 $t\geqslant t_0$，只保留在区域 I 或区域 IV 内的（$*$）的所有解，必定趋于平衡解 $N_1=N_1^0, N_2=N_2^0$.

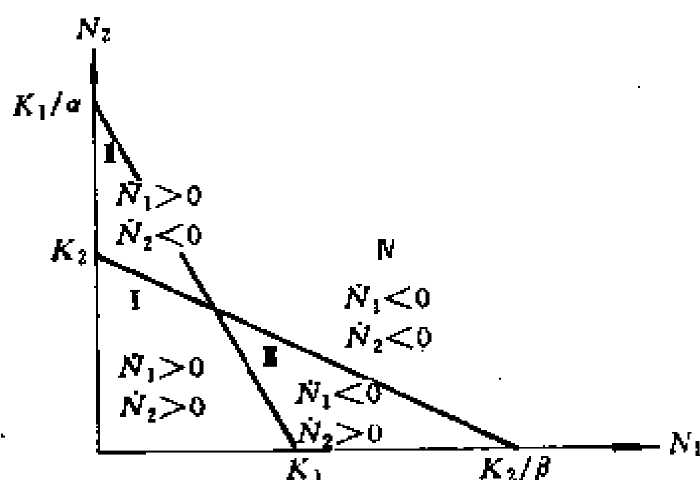


图 17.2

6. 假设 $K_1/\alpha < K_2, K_2/\beta < K_1$，

a) 证明(*)的平衡解 $N_1=0, N_2=0$ 是不稳定的。

b) 证明(*)的平衡解 $N_1 = K_1, N_2 = 0$ 和，$N_1 = 0, N_2 = K_2$ 都是渐近稳定的。

c) 证明(*)的平衡解 $N_1 = N_1^0, N_2 = N_2^0$，(见练习 5)是鞍点。(这里的计算是非常麻烦的)

d) 不难看出(*)的相图必定如图 17.3 所示的形状。

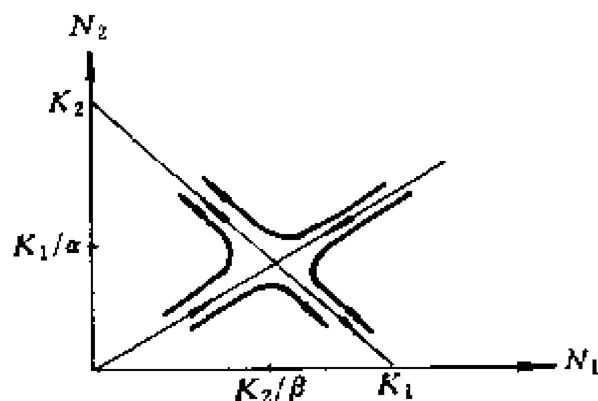


图 17.3

参 考 文 献

[1] G. F. Gause, *The Stuggle for Existence* New York: Hanfner, 1964.

教 师 参 考

目的 生物学的竞争排斥原理断言，为了有限总量的资源而竞争的两个相同物种在同一个群落中是不能和平共处的。在本模块中，这原理由模拟两个物种总数的耦合微分方程数学地导出来了。

预备知识 基本了解微分方程，平衡点及“相位”平面。

时间 1～2 次讲座。

第 18 章

生物循环五重法

Courtney S. Coleman *

1. 序　　言

一个更难以理解的自然现象是某些相互制约的物种总数的规则周期变化，这是一种与已知周期的外界力量(诸如黑夜与白昼的循环、季节或气候的循环)无关的变化。最一般地，这些物种包含在捕食者-被捕食者的相互关系中。这种现象已经在实验室养殖(双小核草履虫(捕食者)和少孢酵母(被捕食者)——见 D'Ancona 的[11])这一小天地以及在加拿大针叶树森林(加拿大山猫(捕食者)和美洲兔(被捕食者)——见 keith 的[17])这一小天地中观测过。其他例子还有瑞士阿尔卑斯山中的芽虫一落叶松树的循环[2]和斯堪的纳维亚的旅鼠一草木循环[19]．我们只打算讨论山猫一野兔的循环，不过，我们即将导出的数学模型，原则上适用于任何捕食者一被捕食者的相互制约。在我们的分析过程中，将研究微分方程组的平衡性和这样的微分方程组有界轨道可能的极限性质。而且这一切将应用于捕食者一被捕食者系统中循环的存在问题。

为了正直起见，必须在此提醒读者，这整个领域仍然是生物学家们、生态学家们和数学家们之间许多议论和争论的根源。因此，我们的分析决不是完全的，事实上，引出的问题将比解决了的更

* Department of Mathmatics, Harvey Madd College, Claremont, CA 91711.

多。

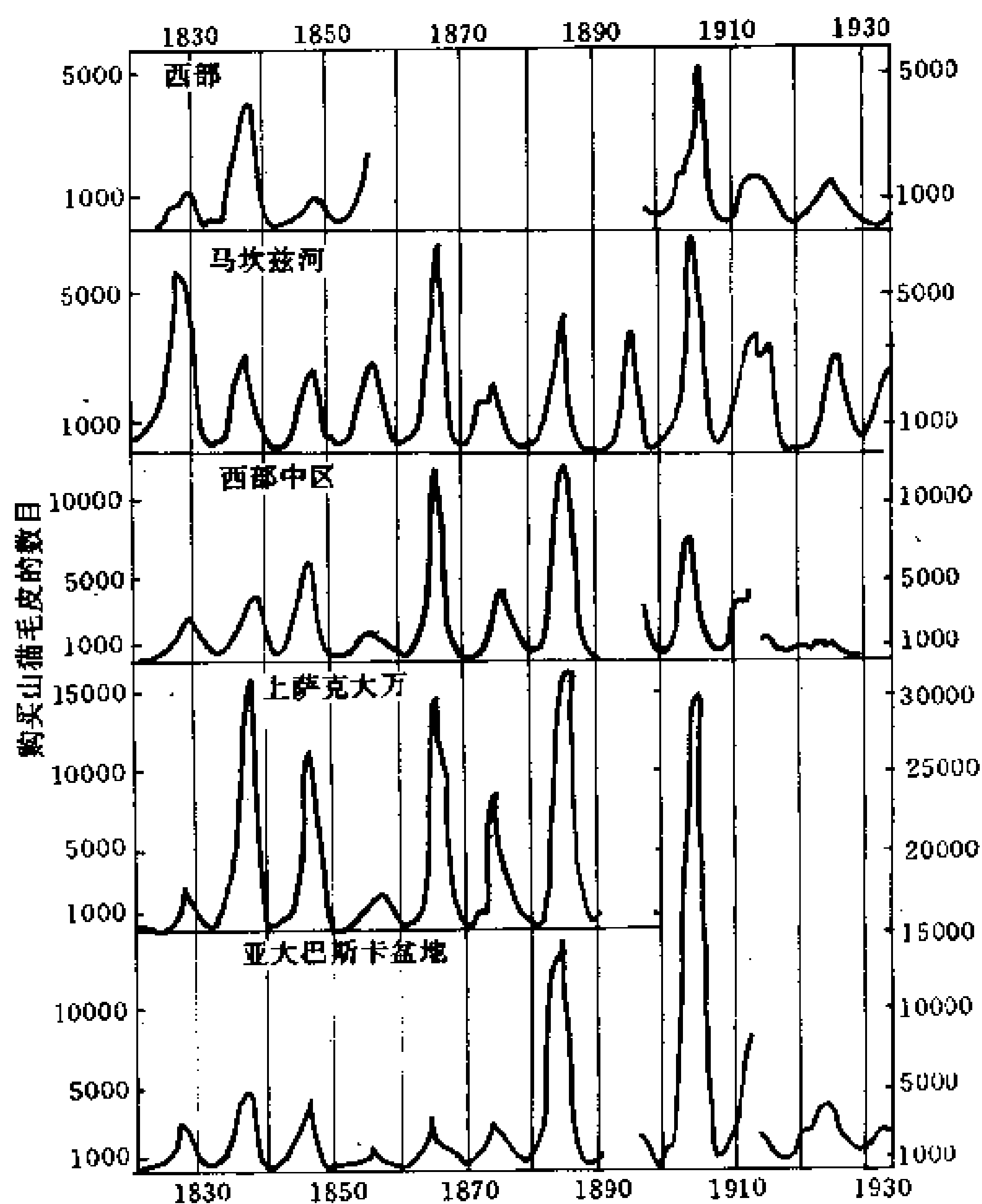


图 18.1 哈得逊湾公司的山猫皮交易,1828—1935.

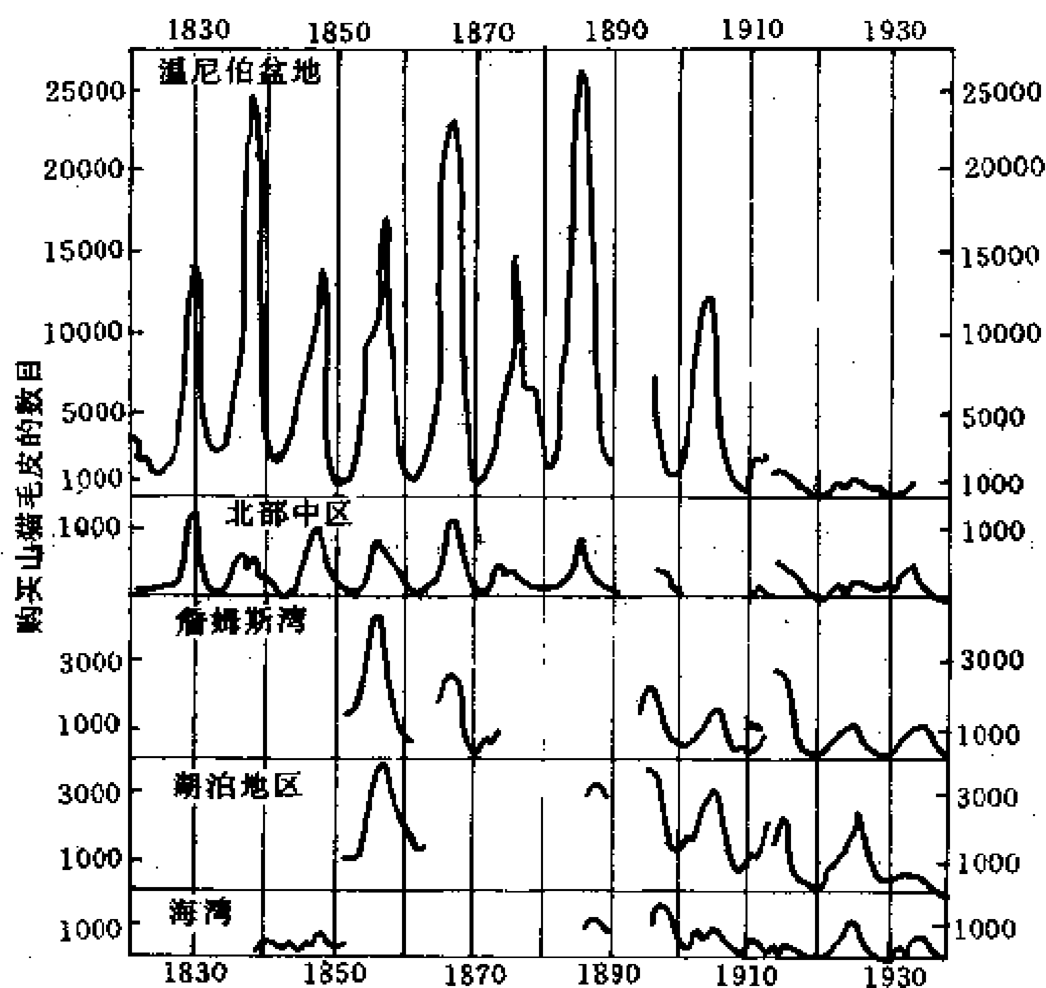


图 18.1(续)

2. 加拿大的山猫循环*

加拿大的针叶树森林，从东部的魁北克延伸到英属哥伦比亚和阿拉斯加，覆盖着几百万平方公里的面积。若干年以前人们就注意到，生活在这辽阔地带的鸟、鱼和哺乳动物等几种物种的总数，按明显的规律和可预测的大致 10 年一循环这样周期地变化。由于

* 本节和下一节的材料主要以 Keith 的[17]以及 Elton 和 Nicholso 的[12]为基础。

好奇的缘故，这种循环的情况，首先在加拿大山猫的数量中观察到。很早以前，山猫的毛皮就用于制作外套、帽子、手套和其他的保暖服装。自18世纪中期以来，山猫服饰工业就兴旺了起来，遍于加拿大森林。从事贸易的特许权几乎全部掌握在哈得逊(Hudson)湾公司中，而这个公司保留了或多或少完整的毛皮收购数据达200多年。于是，猎手关于山猫多少的感觉，在他们的记录中有一个定量的表示。图18.1和18.2的曲线(根据Elton和Nicholson的文章[12])描绘出其中115yr的数据。缺少1892—1896年和1914—1915年的数据(只有Mackenzie(马坎兹)河地区的)，因此这些年的就在图形上省略掉了。

虽然，最大值有变动，但循环的规律以及丰年与贫年数量上的巨大差别仍是显著的。原因是什么？许多解释已经提出来了。这些解释可以分为三种类型：

(1)山猫总数根本没有循环存在，只是收购皮毛的数量才有循环；

(2)山猫循环存在，且为不受山猫影响的外部力量所致(外界产生的原因)；

(3)山猫和动物群或植物群的另一种物种形成了一个封闭的相互制约群落，它们内部的相互制约，导致两种物种在数量上的循环(内生的原因)；

(4)非上述三种类型。

让我们看一看每一类型中典型的论点和反论点。

在第1类型中，有如下解释：

(1a)哈得逊湾公司每10yr都会购进过多的山猫皮，因而就减少收购量，直至过剩的存货销售掉为止。(公司的数据不支持这论点。)

(1b)猎手的数量或他们供给的山猫皮数量遵循十年一循环。

(1c)山猫以十年一循环穿过狩猎区转移(但此循环实际上同

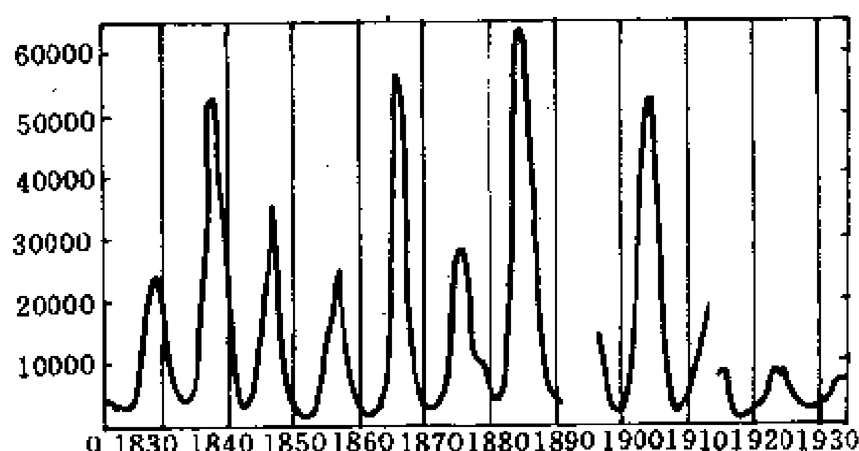


图 18.2　根据图 1 中所有地区（除去詹姆斯(James)湾，湖泊地区和海湾地区）计算的总数

时遍及山猫的全部栖息地，而这些栖息地几乎全是狩猎区)。

这些以及其他类似的论点已经普遍地被抛弃了*。我们打算摘录有关的如下一些论点：

(i)山猫的数量具有明显的高峰和低值，按照十年一循环而变化**；

(ii)山猫的数量与被哈得逊湾公司收购的毛皮数量成正比。

换句话说，我们将假定山猫的循环存在，而毛皮的数据则精确地表示了它的特性曲线。

第 2 类解释认为，循环的原因是各种外部力量直接地或间接地作用在山猫群落上，而这些力量本身则始终不受群落的影响。下面列举一些这类说法。

(2a)狩猎本身成为循环的原因(不见得，因为直到现在，在没有狩猎的地区，已经遵守循环了)。

(2b)由于气候、太阳黑子的数目和密度或者大气层中臭氧的含量等因素的周期变化，才导致山猫数量变化的十年一循环(这种

* 见 Weinstein 关于支持 1b 的最新论点的文章[28]。也见本论文的最后一节，

** 有时相继的高峰之间的间隔为 9yr。200yr 间的数据的平均，约 9.6yr.

循环的论据是欠缺的，而且看来似乎与山猫的循环没有关系）。

（2c）由于山猫的主食来源问题才发生十年一循环，相对于食物来源而言，对山猫的捕杀只是其死亡率中的一个次要因素（一个不寻常的可能性。——见本章结尾）。

尽管最后的"解释"被一些强有力的论据所支持，但我们的注意力主要仍在第3类，关于两种物种相互制约群落的论证。

3. 加拿大的山猫一美洲兔循环

除山猫皮以外，哈得逊公司还购进其他许多物种的毛皮。这些物种之一就是美洲兔。假如将兔子毛皮的年收购量作图于同一坐标系的山猫毛皮年收购量图的旁边，那么，一个十分惊人的事实出现了：兔子也有一个十年一循环，而且看来这循环与山猫的循环有关（图18.3）。对于美洲兔毛皮收购政策的不一致，可能是造成兔子循环有些不规则的原因。此外还需注意：被这些数据覆盖的地区范围，不像用于图18.2的那样广泛。

人们总想假定一个山猫一美洲兔循环，不过，这需要两种物种之间的相互制约。头一个问题是，兔子是否为山猫的主食来源，Nellis 等人的[25]和 Brand 等人的[4]已经给出了自1964年以来的若干个冬天，Edmonton、Alberta 及加拿大以北57mi^{2}地区的山猫总数情况。通过分析山猫的粪便和死山猫的胃和肠里面的东西，以及对山猫的追踪观察，十分确切地表明，兔子的确是山猫的主要食物来源，至少在冬天是这样。事实上，在群落的研究中，按兔子循环最兴盛时期的计算，兔子作为山猫食物约占其食物总重量的75%，尽管这个百分比在兔子稀少的时候要降低。

问题是，山猫和兔子之间的这种捕食者一被捕食者关系，是否成为改变各自出生率和死亡率的主要原因。就山猫而论，论据是强有力的[4][25]，但问题明明还涉及兔子。如果山猫是兔子死亡率中

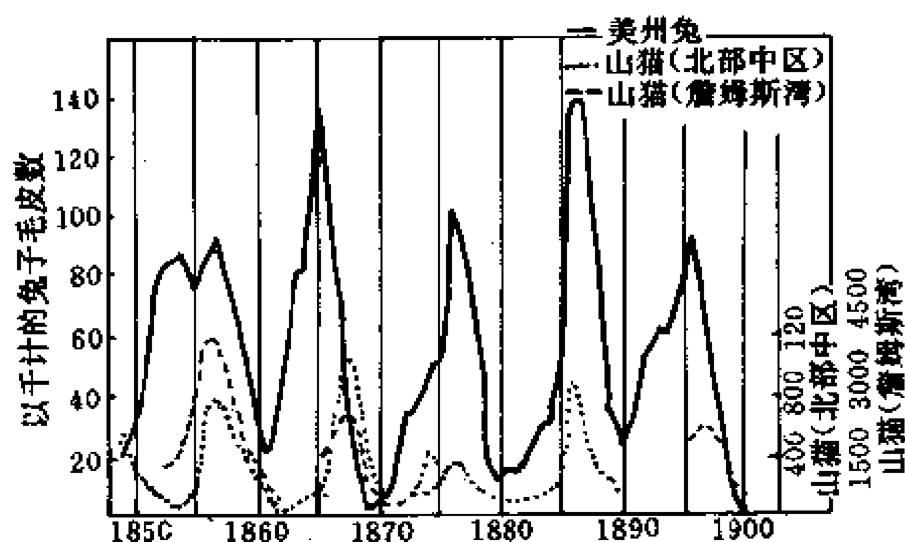


图 18.3 哈得逊湾公司沿哈得逊湾各收购站收购的美洲兔和大致在同样地区收购的山猫等的毛皮收集量(节录自 Elton 和 Nichlson 的[12]和 MacLulich 的[21]).

起支配作用的因素，那么，我们可以合理地把山猫－兔子群落考虑成一个封闭系统，并由下述分析对此循环作一个解释。

另一方面，如果兔子的循环恰恰在没有山猫捕食的情况下发生，那么，我们也许就不得不回过来再谈谈论点 2c，一个未知原因的兔子循环"带动"山猫循环，要不就借助于"非上述三种类型"那一类型的论点。如前所述，这种陈述的最重要的一步，以如下事实为根据：处于捕食者－被捕食者关系的山猫和美洲兔是相互制约的封闭群落。现在，让我们建立一个关于两种物种相互制约的一般的数学模型。

4. 两种物种总数模型

设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示两种物种在时刻 t 各自的总数，而且这两

种物种形成一个封闭的相互制约群落*。尽管在我们心目中有一个清晰的山猫一兔子群落概念，但一开始，对于相互制约的性质，我们并不作任何假定。我们只假定作为时间 t 的函数的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是连续的甚至是可微的。自然，这是事态的真实状况的理想化。因为总数必定是整数，且随时间的推移其改变量也只能是整数。但是，人们可以赞成这样，对于很大的总数，不管怎样，它增加或减少一个或两个，相对于全体来说是“无穷小的”，从而我们可以不妨允许总数的改变量为任意小量而不必正好是整数。例如，如果山猫的总数，在某天午前 8:00 的时候为50 000，而一小时后为50 001，那么，指定午前 8:05 这时刻的“总数”为 50 000.0833…，似乎是合理的。自然，对于小的总数来说，这论点的有效性是值得怀疑的，而下文的分析只限于总数甚大的情况。我们曾经使 $x(t)$ 和 $y(t)$ 理想化为连续函数，同样我们可以完全同意磨光作为 t 的函数的 $x(t)$ 和 $y(t)$ 图形上的任一个“拐角”；于是，像假设连续性一样，我们也假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的可微性。

假定在时间段 t 到 $t+\Delta t$ 中，两个总数的改变量分别为 Δx 和 Δy. 量 $\Delta x/x(t)$ 和 $\Delta y/y(t)$ 称为**相对变化**，而比值

$$\frac{\Delta x/\Delta t}{x(t)} \qquad \text{和} \qquad \frac{\Delta y/\Delta t}{y(t)} \tag{1}$$

为平均相对变化率。在(1)中令 $\Delta t\to 0$，得到每一个物种总数的**相对变化率**

$$\frac{1}{x(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} \qquad \text{和} \qquad \frac{1}{y(t)}\cdot\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}.$$

从这最初的关于 $x(t)$ 和 $y(t)$ 的简单分式，我们可能知道的东西太少了，不过，一般的都有相对出生率和死亡率的数据。今用 B 表示相对出生率，M 表示相对死亡率。人们可以料到，两种物种的

---

* 另一种方法，$x(t)$ 和 $y(t)$ 也可以表示群体密度-栖息地每单位面积或体积上的个数。

出生率和死亡率都依赖于总数本身；也就是说，我们可以有关于物种 x 的 $B_1(x,y)$、$M_1(x,y)$和关于物种 y 的 $B_2(x,y)$、$M_2(x,y)$. 如果群落是封闭的，那么，就没有其他力量在对相对变化率起作用中扮演重要的角色了，因而我们有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B_1(x,y)-M_1(x,y)\equiv f(x,y),\\[2ex]\dfrac{1}{y}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=B_2(x,y)-M_2(x,y)\equiv g(x,y).\end{cases}\tag{2}$$

我们将假设，**相对比率** f 和 g，当 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 时，关于 x 和 y 是连续可微的。(因为把 x 和 y 看作总数，于是，我们只牵涉到 xy 平面上的总数象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$.)

交叉乘之，便得两种相互制约物种的封闭群落的两个基本方程：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xf(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yg(x,y).\end{cases}\tag{3}$$

在下一节，我们将从事这个和更一般的方程的解的研究。

5. 微分方程组——解，轨迹，平衡状态

本节和下一节，我们将避开由(3)给出的特殊模型，而研究一般的平面自控微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=F(x,y),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=G(x,y),\end{cases}\tag{4}$$

其中，假设 F 和 G 在 xy 平面上某一个区域 R 内连续可微。为简单起见，我们总把 R 取为整个平面。术语“自控”是指，(4)中的比率

函数 F 和 G 对时间 t 没有任何明显的依赖关系。注意到，(3)是(4)当 R 为第一象限时的特殊情况(见练习 2)。

一对函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 称为(4)的解，如果满足

(a)$x(t)$ 和 $y(t)$ 定义在同一个开区间 I：$a<t<b$(a 可以是 $-\infty$，b 可以是 $+\infty$)上；

(b)对于 $t\in I$，$x(t)$ 和 $y(t)$ 满足(4)：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=F(x(t),y(t))\\ \dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=G(x(t),y(t));\end{cases}$$

(c)没有另外的函数 $x^*(t)$ 和 $y^*(t)$，它们都定义在区间 I^* $(\supset I)$上，并在 I 上分别地与 $x(t)$ 和 $y(t)$ 相一致，且对所有 $t\in I^*$，满足(4).

条件(c)意味着我们感兴趣的只是(4)在最大时间区间上的解。例如，函数 $x_1(t)=e^t$，$-\infty<t<\infty$，是微分方程 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x$ 的一个合格解，而函数 $x_2(t)=e^t$，$-1<t<10$，则是不合格的。

(4)的每一个解 $x=x(t)$，$y=y(t)$，在 xy 平面确定了一条曲线 Γ，称为解的轨迹。我们不加证明地假定

R 的每一点都有一条轨迹通过； (5a)

任意两条轨迹除非重合，否则不相交； (5b)

每一条轨迹，或者是一条不自交的光滑曲线，
或者是一条简单光滑闭曲线，或者是一个单点。 (5c)

其证明类似于"存在和唯一性"定理，参见 Hirsch 和 Smals 的[16]或 Braun 的[5]. 在(5c)中列举的三种类型的轨迹的示意图见图 18.4. 箭头表明轨迹是怎样随时间 t 的增加描绘出来的。正如下述例子所示，不同的解可以形成相同的轨迹。

例 1　方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x \tag{6}$$

有一对不同的解

$$x_1(t) = \cos t, y_1(t) = -\sin t, \quad -\infty < t < \infty,$$

$$x_2(t) = \sin t, y_2(t) = \cos t, \quad -\infty < t < \infty,$$

这用直接计算即可得证。但是，这两个解确定相同的轨迹 Γ，即具有方程 $x^2+y^2=1$ 且随时间的增加取顺时针方向的单位圆。(6)的通解公式见练习 3. 参看图 18.5.

如果轨迹的时间参数不那么重要，那么，将(4)的两个方程相除，可得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{G(x,y)}{F(x,y)},$$

用处理一阶方程的一些技巧，这个方程或许可以“解”，这些技巧可在 Braun 的[5]或 Boyce 和 Diprima 的[3]中找到。例如，将(6)两式相除即得 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = -x/y$. 分离变量并积分之，则有

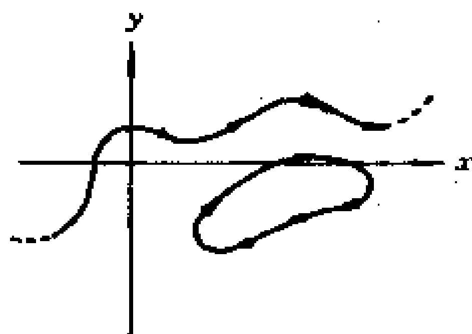


图 18.4　平面系统轨迹的三种类型

$$\begin{cases} y\mathrm{d}y = -x\mathrm{d}x, \\ \dfrac{1}{2}(y^2 - y_0^2) = \dfrac{-1}{2}(x^2 - x_0^2), \\ x^2 + y^2 = A^2, \text{其中 } A^2 \doteq x_0^2 + y_0^2. \end{cases}$$

当 $A=1$ 时，我们得到图 18.5 中所示的单位圆，只是这时不再有任何的时间取向了。注意到，除了点轨迹就是原点自己以外，所有的轨迹都是中心在原点的圆(见图 18.5).

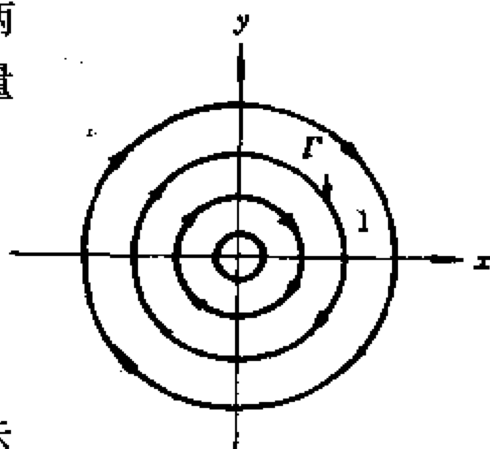


图 18.5　(6)的轨迹

对于(4)的非常数解 $x=x(t), y=y(t)$，如果存在一个正数 T，使得对于一切 t，都有

$$x(t+T) = x(t), y(t+T) = y(t),$$

就说这个解是**周期解**(或**循环**)。最小的这样的 T 称为循环的**周期**。相应的轨迹是一条简单闭曲线,我们也将它称为一个**循环**。注意到,例 1 中循环 Γ 的周期 $T=2\pi$. 反过来,任何简单闭曲线轨迹,对应于一个周期解。这好像是显而易见的,因而我们省略了冗长的正规证明。

一个循环是(5c)中所列举的三种可能轨迹中的一种。另一种类型是点轨迹或叫临界点。一个点(x_0,y_0)是(4)的临界点的充分必要条件是

$$F(x_0,y_0)=0, G(x_0,y_0)=0.$$

这是因为,$x(t)\equiv x_0, y(t)\equiv y_0$ 为(4)的一个解的充分必要条件是

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}t}\equiv 0=F(x_0,y_0), \frac{\mathrm{d}y_0}{\mathrm{d}t}\equiv 0=G(x_0,y_0).$$

由于**每一个循环的内部至少存在一个临界点**,因此,临界点在循环的研究中扮演了一个重要角色。这个事实的证明并不容易——见 Hirsch 和 Smale 的[16].

例 1 的方程组恰好只有一个临界点;其他轨迹都是循环(练习 3)。下一个例子中的方程组恰好只有一个临界点,也恰好只有一个循环。

例 2 设 r 和 θ 为极坐标

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta, \end{cases} \tag{7a}$$

或

$$\begin{cases} r = (x^2+y^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan(y/x). \end{cases} \tag{7b}$$

考虑极坐标中的微分方程组

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r(1-r^2), r\geqslant 0 \tag{8a}$$

$$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1. \tag{8b}$$

首先，把(8)用直角坐标表示。由(7a)和(8)，我们有

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(1-r^2)r\cos\theta-r\sin\theta\\ \quad=(1-x^2-y^2)x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(1-r^2)r\sin\theta+r\cos\theta\\ \quad=(1-x^2-y^2)y+x,\end{cases}\tag{9}$$

其中我们用了链规则（即$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\cos\theta)=(\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta)(\cos\theta)(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$）. 注意到，(8)的任一个解 $r=r(t),\theta=\theta(t)$，通过(7)，给出(9)的解 $x=x(t),y=y(t)$，反之亦然。

方程(8)比(9)解起来更容易些。事实上，有

$$r(t)=\frac{r_0}{[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}]^{1/2}},r_0\geqslant 0\tag{10}$$

$$\theta(t)=t+\theta_0,\theta_0\text{ 任意。}\tag{11}$$

$r(t)$这个解可由(8a)经分离变量得到，运算的细节留给读者完成（练习 4)。(11)式由(8b)通过积分得到。（假设当 $t=0$ 时，$r=r_0$ 和 $\theta=\theta_0$)。

如果 $r_0=1$，则 $r(t)\equiv1$；而如果 $r_0=0$，则 $r(t)\equiv0$. 由(10)看出，如果 $0<r_0<1$ 那么，当 t 增加到∞时，$r(t)$单调增加到 1，如果 $r_0>1$，则当 t 增加到∞时，$r(t)$单调减少到 1. 在直角坐标下，$r(t)\equiv0$ 对应于一个临界点(0,0)，而 $r(t)\equiv1,\theta(t)=t+\theta_0$ 对应于直角坐标方程

$$x(t)=\cos(t+\theta_0),y(t)=\sin(t+\theta_0),$$

这是单位圆的参数方程。

因此，方程组(9)有唯一的一个临界点（原点）和唯一的一个沿着单位圆的循环。轨道的图形见图 18.6.

在例 1 和例 2 中，最有特色的轨迹是循环和临界点，我们称它们为**平衡轨迹**。注意到，例 1 中的每一条轨迹都是平衡轨迹，而例

2 中的每一条轨迹要么是平衡轨迹，要么就是随时间推移趋近于这样一条轨迹。有没有不解方程组(4)和不求通解公式就可决定平衡轨迹的简便方法？通过解方程组

$$F(x,y)=0 \text{ 和 } G(x,y)=0$$

可以求出临界点。然而，求出微分方程组的循环（如果存在的话），通常就不那么容易了。相对来说，例 1 和例 2 是简单的，因为相应的微分方程组能够解出来，但这并不总是可能的。在下一节中，我们将阐述一个强有力的方法，以确定一般的平面自控微分方程组(4)的轨迹中循环的存在，它不依赖于通解公式。

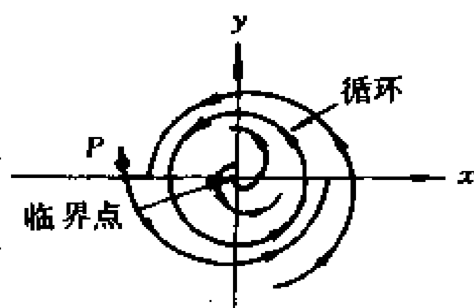


图 18.6　一个循环，一个临界点

例 1 和例 2 的微分方程组不具有(3)的形式，于是不能描述一对相互制约物种的动态（练习 2）。尽管如此，每一个微分方程组仍有循环，因而我们期望山猫一兔子相互制约的任何模型都有循环，于是，我们可以想象图 18.5 和 18.6 中的轨迹模型至少定性地可能是山猫一兔子总数轨迹的示意图。（注意到，图 18.5 和 18.6 中的非常数轨迹通过所有四个象限，而山猫一兔子轨迹，自然只能保持在第一象限。）我们把更详细地分析这两个例子、并思索每一个微分方程组的“生态学意义”的工作留给读者（练习 3—5）。

6. 五　重　法

这一节的目的是阐述微分方程组(4)存在循环的准则，这准则不要求解出微分方程组。像以前一样，(4)的解是一对函数 $x=x(t)$，$y=y(t)$，它们对于在某个最大时间区间上的一切时刻 t，满足(4)的两个方程。为方便起见，我们将用 $z(t,P)$ 表示坐标对 $(x(t),y(t))$，其中 $P=(x(0),y(0))$ 为解的“起点”。Γ 将表示对应

的轨迹。

以$\{z(t,P):t\geqslant 0\}$定义的Γ的子集是起自P的正半轨迹，用Γ_P^+表示。Γ_P^-可以类似地定义。如果一个轨迹Γ的正半轨迹，"起始点"P对它无关紧要，我们就用更简单的记号Γ^+(Γ^-有类似的意义)。同样，我们将用$z(t)$代替$z(t,P)$. 在图 18.6 中就可看到正半轨迹(例如由P开始的半轨迹)的例子。

关于正和负半轨迹Γ_P^+和Γ_P^-，我们可以定义**正极限集**和**负极限集**$\omega(\Gamma_P^+)$和$a(\Gamma_P^-)$如下：

定义 设Γ_P^+为一个正半轨迹，那么正极限集$\omega(\Gamma_P^+)$是一切如下那样的Q所构成的集：对于某个递增且发散于∞的时间序列$t_1,t_2,\cdots,t_n,\cdots$，有$z(t_n)\to Q$.

负极限集$a(\Gamma_P^-)$可类似地定义，不过，这时得用t_n当n增加时递减地发散于$-\infty$. 读者不难验证，极限集与Γ上点P的选取无关，因此，我们可以谈及$\omega(\Gamma)$和$a(\Gamma)$(练习 6)。注意到，如果Γ是临界点或一个周期轨迹，则$a(\Gamma)=\omega(\Gamma)=\Gamma$. 下面的例子说明了平面极限集的某些可能情形。

例 3 微分方程组$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x,\mathrm{d}y/\mathrm{d}t=-y$有轨迹$\Gamma_1:x=0,y=e^{-t}$；$\omega(\Gamma_1)=(0,0)$；既然当$t\to-\infty$时，$y\to\infty$，因而$a(\Gamma_1)$是空集。对于轨迹$\Gamma_2:x=e^t,y=0$；$\omega(\Gamma_2)$为空集，$a(\Gamma_2)=(0,0)$. 对于轨迹$\Gamma_3:x=e^t,y=e^{-t}$；两个极限集都是空集。见图 18.7.

如果$\Gamma\neq\omega(\Gamma)$，通常称当$t\to+\infty$时，Γ正渐近于$\omega(\Gamma)$. 于是，例 3 中的Γ_1正渐近于原点。同样，我们可以定义Γ负渐近于$a(\Gamma)$；例 3 中的Γ_2就是负渐近于原点的。

例 4 图 18.8 所示的轨道是由例 2 的方程组产生的，有下述的极限集(见练习 7)

$$\begin{cases}Q=\omega(Q)=a(Q)\\ \Gamma=\omega(\Gamma)=a(\Gamma)\\ \Gamma=\omega(\Gamma_1),Q=a(\Gamma_1)\\ \Gamma=\omega(\Gamma_2),a(\Gamma_2)\text{ 为空集。}\end{cases}$$

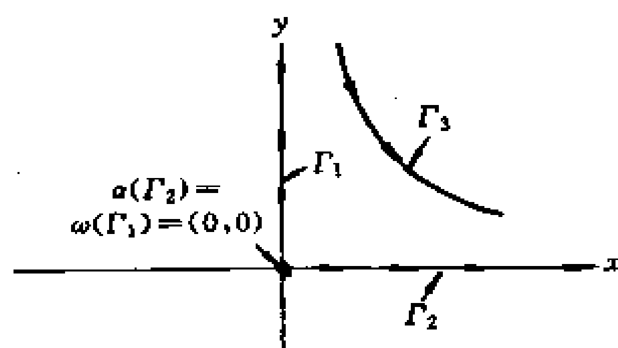


图 18.7 例 3 的一些轨迹和极限集



图 18.8 例 4 的轨迹和极限集

从这些例子可以猜测，极限集要么是空集，要么含有唯一的平衡轨迹，即临界点或循环。但是，像下面的例子所表明的，这点并不正确。

例 5 在极坐标下，微分方程组

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-y[y^2+(x^2+y^2-1)^2]+x-xy^2-x^3\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=x[y^2+(x^2+y^2-1)^2]+y-x^2y-y^3\end{cases}\tag{12}$$

变成

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=r(1-r^2)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=r^2\sin^2\theta+(r^2-1)^2.\end{cases}$$

注意到，在极坐标下，临界点的位置确定为：P_3 在 $r=0$ 处；P_2 在 $r=1,\theta=0$ 处；而 P_1 在 $r=1,\theta=\pi$ 处。再注意到，除在这些临界点外，$\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t>0$，而如果 $0<r<1$，则 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t>0$；如果 $r>1$，则 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t<0$；如果 $r=1$，则 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=0$. 我们有 $\omega(\Gamma_3)=\Gamma_1\cup\Gamma_2\cup\{P_1,P_2\}$，而 $\alpha(\Gamma_3)$ 为空集；$\omega(\Gamma_4)=\omega(\Gamma_3)$，且 $\alpha(\Gamma_4)=\{P_3\}$；$\omega(\Gamma_2)=\{P_1\}=\alpha(\Gamma_1)$，$\alpha(\Gamma_2)=\{P_2\}=\omega(\Gamma_1)$. 其相图就示于图 18.9 中。回顾例 2，$r(t)$ 由(10)给出。(例 2 和例 5，有相同的 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 的方程式，但 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$

的方程式不同。)我们让读者来完成关于这个例子的分析,验证下面指出的极限集和图 18.9 的真实性(练习 8)。

例 5 含有一个 ω 极限集,这个集合(也就是集 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{P_1, P_2\}$)既不是唯一的临界点也不是循环。这是一个循环图的例子。更一般地,**循环图** CG(cycle graph)是连通的轨迹的并集,使得

(1)CG 包含正有限多个临界点;

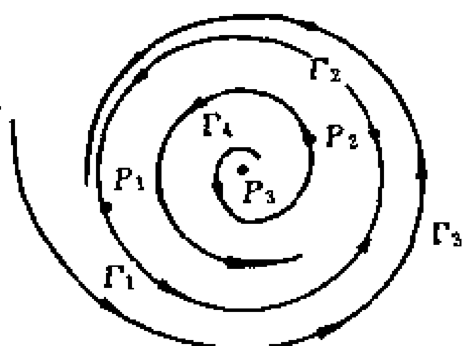


图 18.9 (12)的轨迹

(2)如果 $P_1, \cdots, P_n$ 是 CG 的临界点,那么存在 CG 的非临界轨迹 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$,使得

$$\alpha(\Gamma_i) = P_i, i = 1, \cdots, n$$
$$\omega(\Gamma_i) = P_{i+1}, i = 1, \cdots, n$$

其中 $P_{n+1} \equiv P_1$;*

(3)CG 中每一条轨迹的每一个极限集是 CG 的临界点。

例 5 中的轨迹 Γ_3 和 Γ_4 都是正渐近于循环图 $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{P_1, P_2\}$ 的。

从例 2~5 可以发现,一条轨迹 Γ(假使它一开始时并不是临界点或循环),如果当 t 增加时它有界[即 Γ^+ 位于一个矩形中],那么,它会正渐近于或者一个临界点,或者一个循环,或者一个循环图。实际上,正如 Poincare 和 Bendixson 所证明的下述非常深刻的结果那样,没有其他的可能存在。

五重法 设 Γ^+ 为(4)的一条有界正半轨迹,且假定(4)只有有限个临界点。那么,下述五种可能中恰有一种是真的:

(1)Γ 是一个临界点;

---

* 这里须对 $P_1, \cdots, P_n$ 适当编号后,才能保证 $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_n$ 的存在。——校注

(2)Γ 正渐近于一个临界点；

(3)Γ 是一个循环；

(4)Γ 正渐近于一个循环；

(5)Γ 正渐近于一个循环图。



关于这个定理的证明，见 Coddington 和 Levinson 的[9]. 如果 Γ^- 有界，则关于 $a(\Gamma)$ 的类似结果成立。如果把 $\omega(\Gamma)$ 和 $a(\Gamma)$ 的可能性联合起来，就得到了有界轨迹的极限集的 11 种可能（见练习 9）。这些可能的示意图见图 18.10.

如果一个正半轨迹 Γ^+ 有界，并且它的正极限集 $\omega(\Gamma)$ 不包含临界点，那么，根据五重法，可以断定循环的存在。事实上，在这种情形下，$\omega(\Gamma)$ 本身就是一个循环。在下一节，我们将叙述一个捕食者的模型，恰好出现了这种情况。

为了今后的应用，我们引入排斥临界点的概念。(4)的临界点 P 称为排斥的，如果存在一个以 P 为中心的圆形区域 D，使得

(1)对于一切 $Q\in D$，当 $t\to-\infty$ 时 $z(t,Q)\to P$，

(2)对于一切 $Q\in D$ 和使得 $t_n\to\infty$ 的一切序列 $\{t_n\}$ 以及 $z(t_n,Q)$ 有定义，我们有 $z(t_n,Q)\not\to P$.

对于排斥性，有一个简单的代数判断法，不过，我们把证明省略了。

排斥性判断法 设(x_0,y_0)是(4)的临界点，且 a,b,c,d 为如下定义的常数

$$a=\frac{\partial F}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)},b=\frac{\partial F}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)},$$

$$c=\frac{\partial G}{\partial x}\bigg|_{(x_0,y_0)},\mathrm{d}=\frac{\partial G}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}. \tag{13}$$

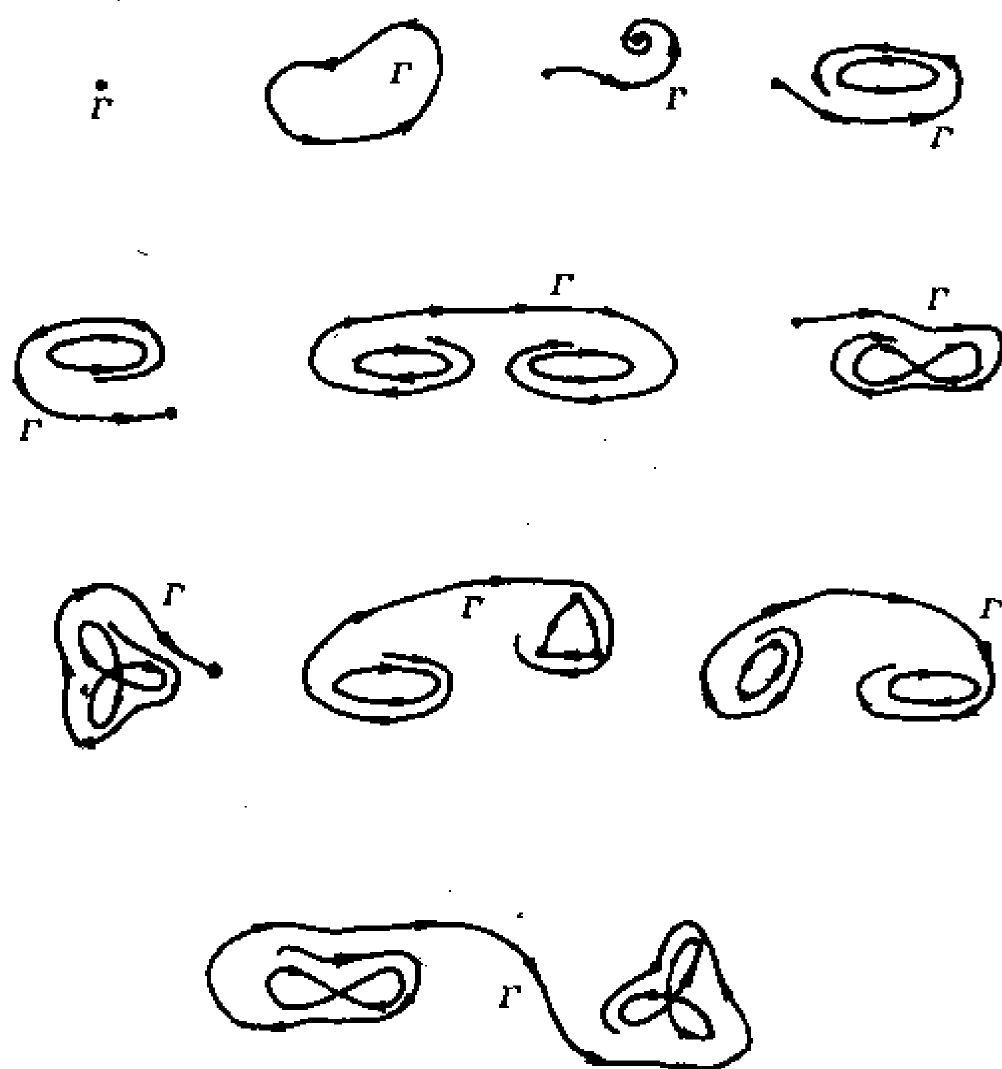


图 18.10　位于有界域中只包含有限个临界点的轨迹的正、负极限集的 11 种情况

如果 $a+b>0$ 以及 $ad-bc>0$ *，则(x_0,y_0)为排斥临界点。如果 $a+d<0$ 或 $ad-bc<0$，则(x_0,y_0)不是排斥的。

注意到，如果 P 是排斥的，那么，Γ 不会在任何非常数轨迹的正极限集上。下一个例子说明了，在不知道解的公式时，怎样用五

---

* 这些条件意味着 F 和 G 在(x_0,y_0)处的雅可比矩阵的特征值有正实数部分。

重法和排斥性判断法去推断循环的存在性。

例 6 我们将用例 2 的方程组，但不用任何求解公式。设 R 为中心在原点、$0\leqslant r\leqslant 2$ 的圆形区域，R 的内部正好有一个临界点 $(0,0)$。这个点是排斥的，因为由(9)，知

$$\begin{cases} a=\dfrac{\partial}{\partial x}\{(1-x^2-y^2)x-y\}_{(0,0)}=\{1-x^2-y^2-2x^2\}_{(0,0)}=1 \\ b=\dfrac{\partial}{\partial y}\{(1-x^2-y^2)x-y\}_{(0,0)}=\{-2yx-1\}_{(0,0)}=-1 \\ c=\dfrac{\partial}{\partial x}\{(1-x^2-y^2)y+x\}_{(0,0)}=\{-2xy+1\}_{(0,0)}=1 \\ d=\dfrac{\partial}{\partial y}\{(1-x^2-y^2)y+x\}_{(0,0)}=\{1-x^2-y^2-2x^2\}_{(0,0)}=1. \end{cases} \tag{14}$$

因此 $a+d=2, ad-bc=2$，从而满足排斥性判断法的假设条件。

于是在 R 的圆周上任何一点 P，有 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=r(1-r^2)=2(1-4)<0$. 因此，$\Gamma_P^+$ 穿过 P 进入 R，并且决不离去。这样，五重法适用于 Γ_P^+. 由于原点这排斥临界点不可能属于 $\omega(\Gamma_P^+)$，又由于 R 不包含其他的临界点，我们得知 $\omega(\Gamma_P^+)$ 为一循环。(如果 P 位于 R 的圆周上，则 Γ_P 自己不可能是循环。为什么?) 自然，通过对(8)的校验，容易看出，$r\equiv 1$ 是一循环。

7. 捕食者—被捕食者模型：Kolmogorov 定理

让我们再回到方程(3)这个(4)的特殊形式上来，我们主张把它作为两种物种相互制约的模型：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=xf(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=yg(x,y). \end{cases}$$

现在我们要做两件事。首先，给函数 f 和 g 加上反映被捕食者物

种 x 和捕食者物种 y 之间"捕食者一被捕食者相互制约"的条件。其次，证明五重法在某些情况下可以用来推断循环的存在。为了更方便地留意捕食者和被捕食者，对于兔子，我们用 H 代替 x，对于山猫，用 L 代替 y，进而考虑下述方程组

$$\frac{dH}{dt} = Hf(H,L)$$

$$\frac{dL}{dt} = Lg(H,L), \tag{15}$$

其中 f 和 g 在整个总数象限 $H \geqslant 0, L \geqslant 0$ 上是连续可微的。

下述关于 f 和 g 的条件反映了捕食者一被捕食者相互制约的可能性。它们和 Kolmogorov 最初提出而后被 Bulmer 修改的条件有关。[18][8]

(1) $\partial f/\partial L < 0$ 山猫总数的增加促使兔子的减少；

(2) $\partial g/\partial H > 0$ 兔子总数的增加促使山猫的增加；

(3)* $\partial f/\partial H < 0$ 兔子总数的增长导致过分拥挤，等等，因而影响到兔子的增长率下降；

(4) $\partial g/\partial L < 0$ 由于自身数目过剩的作用，山猫数量受到限制；

(5) $f(0, L_1) = 0$ 对于某个 $L_1 > 0$；山猫超过其阀值总数 L_1 时，兔子总数就将减少（根据条件 1 和 3）**，即使兔子总数甚少的时候也这样。

(6) $f(H_1, 0) = 0$ 对于某个 $H_1 > 0$；H_1 为没有山猫时系统所能容纳的兔子数量；超过了 H_1，由于过剩，就开始衰落（根据条件 3）；

(7) $g(H_2, 0) = 0$ 对于某个 $H_2 > 0$；H_2 为维持山猫群落

---

* 这个假定后面将改变。

** 原文误为"by conditions 1and 2"。——校注

所必须的兔子数量的下界；

(8)$H_1>H_2$ 否则，山猫群体将灭绝；

(9)* 兔子等斜线， 这条由 $f(H,L)=0$ 定义的光滑曲线，如图 18.11 中示意；

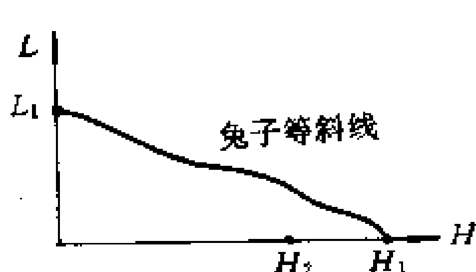


图 18.11 兔子等斜线



图 18.12 山猫等斜线

(10)山猫等斜线，这条由 $g(H,L)=0$ 定义的光滑曲线，如图 18.12 中示意。

条件 9 和 10 似乎是含糊不清的和非生态学的。更精确的叙述如下：

(9)当 $H\geqslant 0, L\geqslant 0$ 时，由兔子等斜线的方程 $f(H,L)=0$ 可以唯一地解出 L：$L=h(H)$，其中 h 定义在区间$[0,H_1]$上，连续可微，单调递减，且 $h(0)=L_1, h(H_1)=0$.

(10)当 $H\geqslant 0, L\geqslant 0$ 时，由山猫等斜线的方程 $g(H,L)=0$ 可以唯一地解出 H：$H=k(L)$，其中 k 定义在区间$[0,\infty)$上，单调递增，连续可微，且 $k(0)=H_2$.

其实，由条件(1)—(7)，借助于隐函数定理，可以导出这些精确的陈述(类似陈述的但不太容易的证明见[1]或[16])。这里我们

* 条件(9)将修改。

不打算进行这些推理了。

读者能够容易证明(练习 10),(15)在总数象限里面恰好有一个临界点 Q,而且这个 Q 是山猫和兔子的等斜线的交点(x_0,y_0).

我们恢复寻找循环的工作。这样,人们就可期望下一步将像例 6 那样进行。我们打算这样做,不过我们将构造区域 R,使之既包含一个有界的正半轨迹 Γ_P^+,又包含临界点 Q. **困难在于 Q 不是排斥的**(练习 11)。于是,可以想象,$\omega(\Gamma_P^+)$可能包含 Q,且根本没有循环。这甚至可能是捕食者一被捕食者系统中的情况。尽管如此,我们需要循环,并不得不改变某些条件以使 Q 是排斥的。

这实在是一个困难,并且在近几年内已经引起这个领域的研究工作者之间的许多争论。在对生物的包含循环的捕食者一被捕食者系统(但不是山猫和兔子)作了实验室的实验的基础上,*Rosenzweig* 已经提议[26],条件 3、9 和 10 应该用下述的条件来代替。

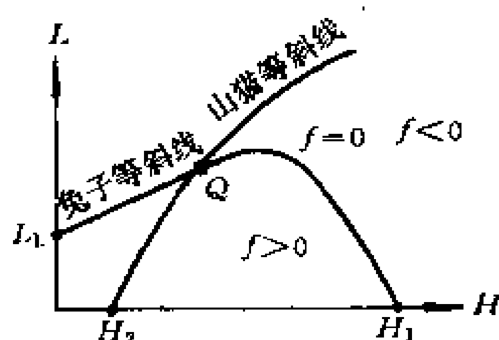


图 18.13 按照 *Rosenzweig* 的假设画出的等斜线

(3*a*)$\partial f/\partial H\,|_{L=0,H小}>0$ 没有山猫和低密度的兔子意味着群居有助于兔子的繁殖。

(9*a*—10*a*)兔子和山猫的等斜线有图 18.13 中示意图的样子,临界点 Q 位于兔子等斜线的上升部分。

我们需要一个决定性的条件,以使 Q 成为排斥的。像(13)一样,设 a,b,c,d 在临界点 $Q=(x_0,y_0)$上确定。由于 $F=xf$ 以及 $G=yg$,我们有(回顾一下 $f(x_0,y_0)=0=g(x_0,y_0)$)

$$\begin{cases} a=F_x(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)+x_0f_x(x_0,y_0)=x_0f_x(x_0,y_0)\\ b=F_y(x_0,y_0)=x_0f_y(x_0,y_0)\\ c=G_x(x_0,y_0)=y_0g_x(x_0,y_0)\\ d=G_y(x_0,y_0)=g(x_0,y_0)+y_0g_y(x_0,y_0)=y_0g_y(x_0,y_0). \end{cases} \tag{16}$$

我们的最终条件是

(11)$a+d>0$ 和 $ad-bc>0$.

我们不打算去证明这些与生态学领域有关的新条件是正确的了(见 Rosenzweig 的[26])。它们是有争论的，但确实给了我们下述的定理。

Kolmogorov **循环定理** 设(15)的函数 f 和 g 在总数象限中满足条件 1,2,3a,4～8,9a,10a 和 11. 那么，在总数象限内部存在一个循环。

证明 为简单起见，假设在图 13 的示意图中的山猫等斜线与垂线 $H=H_1$ 相交(不是这种情况时的分析，见 Bulmer 的[8])。那么作图 18.14 中的矩形域 R.

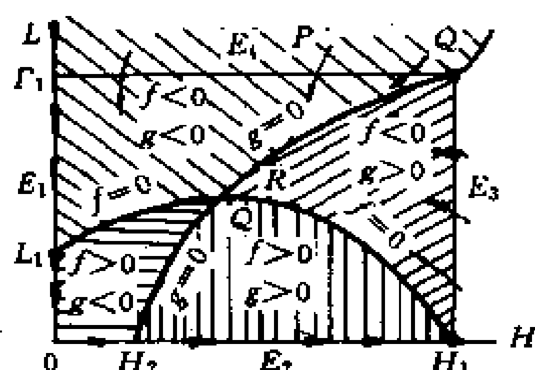


图 18.14 Kolmogorov 循环定理区域 R

让我们证明，正半轨迹 Γ_P^+(其中的 P 比如说位于 R 的顶边 E_4 上)整个地位于 R 内部。我们将通过证明 Γ_P^+ 不可能穿过周界 $E_1\cup E_2\cup E_3\cup E_4$ 从 R 中“逃脱”来证明之。E_1 位于一条轨迹上，轨迹 Γ_1 由 $H=0,L>0$ 定义，而 0 是原点且为临界点。于是，当时间增加时，没有轨迹能够穿过 E_1 从 R 中逃脱，这是因为，如果一条轨迹能这样，它就必须交于 Γ_1 或临界轨迹 0；但是，轨迹之间是不能相交的。边界 E_2 由下述轨迹组成：两个临界点 0 和 H_1(我们把数 H_1 和点$(H_1,0)$等同起来)，以及由 $0<H<H_1, L=0$，且离开 0 朝向 H_1 而去所定义的轨迹。(读者应当验证一下，E_1 和 E_2 的箭头正好如标明的那样(练习 12).)依旧，没有轨迹能够穿过 E_2 离开 R.

随着时间的增加，有些轨迹可能穿过 E_3 内部的弧自右向左移动，因为这个弧上的点在兔子的等斜线(在其上 $f(H,L)=0$)上

方，且由条件 1 知道 $\partial f/\partial L<0$，于是，沿这条弧 $dH/dt<0$，依旧，没有轨迹能够通过临界点 H_1 离开 R. 通过 $\tilde{Q}$ 的轨迹将水平地移动到这个点的左边，因为 $\tilde{Q}$ 在山猫的等斜线上，即 $g(H,L)=0$，因此 $dL/dt=0$，沿着穿过 E_4 内部的弧，轨迹向下移动到左边，因为弧上的点同时在两条等斜线之上方，且根据条件 1 和 4，有 $\partial f/\partial L<0$，$\partial g/\partial L<0$. 于是，没有轨迹能够穿过边界而离开 R，且轨迹通过总数象限内部的顶边和右侧边进入 R.

我们当前的目标是要证明 $\omega(\Gamma_P^+)$是一个循环。根据五重法，只要证明 $\omega(\Gamma_P^+)$不包含临界点就行了。可是，在总数象限中，(15)的临界点为原点 0、位于 H 轴上的点 H_1 以及 Q. 因为 Q 是排斥的，故 Q 不可能在 $\omega(\Gamma_P^+)$中，也不可能有 $\omega(\Gamma_P^+)=\{0\}$. 为了"到达"0，Γ_P^+ 必须贯穿图 18.14 中打横影线区域的内部，且对一切足够大的 t 还将保留在这个区域内(如果 $\omega(\Gamma_P^+)=\{0\}$)。然而，如果 $(x(t),y(t))$在这个区域的内部，那么，$x(t)>0$ 且 $dx(t)/dt>0$，这意味着我们不可能有：对于一切足够大的 t，$(x(t),y(t))$保留在这个区域内，以及当 $t\to\infty$ 时，$(x(t),y(t))\to 0$. 可用类似的论证(练习 13)证明 $\omega(\Gamma_P^+)\neq\{H_1\}$.

于是，如果 $\omega(\Gamma_P^+)$果然包含着任一个临界点，$\omega(\Gamma_P^+)$必定是一个循环图 CG. 由于 Q 不是任一非常数轨迹的正极限集，故 Q 不可能属于 CG(参看循环图的定义)。如果 H_1 属于 CG，那么，具有正极限集$\{H_1\}$和负极限集$\{0\}$的沿 E_2 的轨迹也必定属于 CG，因为那是在 R 中具有正极限集$\{H_1\}$的唯一的轨迹。根据循环图定义中的条件 3，于是我们必定有 $0\in CG$，但是，如果 $0\in CG$，那么，无界轨迹 Γ_1 也属于 CG，这是因为它是总数象限中以$\{0\}$为正极限集的一条轨迹。由于 $\omega(\Gamma_P^+)$是有界的(因为 Γ_P^+ 有界)，这是不可能的。于是，$\omega(\Gamma_P^+)$不含有临界点。根据五重法，我们得证 $\omega(\Gamma_P^+)$是一个循环，从而证明了 Kolmogorv 循环定理。

注 注意到，当 P 为位于 R 的边界上和总数象限内部的任一

点时，上述论证对于 Γ_p^+ 都成立。也注意到，Γ_p^+ 保留在 R 内的证明，没有用到 Q 的排斥性，因而同样会从最初阐述的条件 1～10 得到。

我们终于提出了一个捕食者－被捕者食系统中关于循环的判断法。满足 Kolmogorov 定理所有假设的系统，见结尾和练习 14 及 18. 应该再强调一下，可能存在没有循环的捕食者－被捕食者系统（见[10]），不过，在这里，我们自然对它们没有什么兴趣。

我们已经集中注意于采用微分方程模型。这样的方程瞬时地把总数的改变转换为增长率的变化。不过，要是引入一个时间迟滞，例如用微分迟滞方程

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H(t)}{\mathrm{d}t} = H(t)f(H(t-\alpha),L(t-\beta))\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L(t)}{\mathrm{d}t} = L(t)g(H(t-\gamma),L(t-\delta)),\end{cases}$$

（其中迟滞量 α,β,γ 和 δ 都是正常数）就会更逼真。本质上，这样的方程组断言，现在的比率不仅受现在总数的影响，而且也受过去某一特定时刻出现的总数的影响。甚至循环也可以从这样的方程组导出[22].

8. 结尾：兔子吃山猫吗？

如果适当选取常数，那么，模型

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = H[a^2-\beta^2(H-\gamma^2)^2-\delta^2L]\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} = L[-a^2+b^2H-c^2L].\end{cases}\tag{17}$$

适合 Kolmogorov 循环定理的条件（练习 14），从而有循环。（另一个模型见练习 18.）从 $\mathrm{d}H/\mathrm{d}t$ 的形式

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t} = (a^2 - \beta^2\gamma^4)H + 2\beta^2\gamma^2H^2 - \beta^2H^3 - \delta^2HL,$$

我们看到，如果 $a^2>\beta^2\gamma^4>0,\delta>0$，那么，当 L 和 H 充分小的时候，兔子总数一定“迅速增长”。在这种情况下，平方项 $2\beta^2\gamma^2H^2$ 所支配的东西发生了，并且兔子总数非常迅速地增长。自然，一旦 H 或 L 充分大时，负比率项就起主要作用，增长率随之变慢，甚至可能变成负的。

模型(17)模拟了加拿大森林中山猫-兔子群落的真实事态吗？Gilpin 在[15]中试图使一个类似的模型适合于来自哈得逊湾公司记录的毛皮的真实数据。在他的变化率方程中，对于常数的“最合适”的选择，导致了用 δ^2 和 $-b^2$ 分别地代替(17)中的 $-\delta^2$ 和 b^2，这意味着，兔子和山猫的遭遇增加了兔子的总数而减少了山猫的总数。莫名其妙地兔子吃了山猫！

Gilpin 认为，这种生物学的令人吃惊的事，可能是靠着兔子带有的、不是对于兔子而是对于山猫是致命的疾病造成的。可是，Weinstein 在[28]中说，没有这样一种疾病的资料。Weinstein 认为，山猫的循环是想象的，而在哈得逊湾公司的记录中表明的循环，只与为取得毛皮而使用捕兽器的猎手的狩猎计谋的变化有关。特别地，他认为设陷阱的猎手(加拿大的印第安人)大抵对用兔子作为食物感兴趣。在兔子足够多的岁月里，猎手很容易地获得所需的食物，从而为了零花钱就用剩余的时间去诱捕山猫。但是，如果兔子稀少了，捕兽者就没有时间去捕获山猫了，因此，哈得逊湾公司收购的山猫皮数量就大大下降。这种解释多少有点牵强附会。

还有另外的不同见解。例如，Nellis 等人[25]和 Brand 等人[4]指出，山猫的捕食不是美洲兔大量死亡的非常充分的决定性因素。于是，可能是另一种东西正导致兔子的循环，而不是山猫。这意味着山猫-兔子群落不是封闭的。

Keith 在他的书中甚至作出了一个有力的论证[17]，以否定

山猫-兔子群落封闭性的存在。他指出，那些北方森林的外来动物也有十年一循环的：披肩鸡，北美松鸡，匈牙利松鸡，雷鸟，云杉鸡，蓝松鸡，黑狐狸，水貂和食鱼貂。Bulmer 在[7]中附加了更多的物种的清单：狼獾，枭，郊狼，狼，臭鼬，貂，麝鼠和大西洋鲑。这些物种中的一些，循环的根据不足，而且周期也未必总是 10 年。可是，遍布于巨大森林面积的、十分不同的物种的周期长度和循环状况两者充分的相互作用（即几乎同时达到最高点和最低点）存在，暗示了某些外部的周期的推动力使得这样的整个生态系统在它的循环轨迹上运动。关于这些问题的许多新近的论述，见[27].

Keith 注意到[17]，对于挑选出来的任一个特殊理由，证据都是不充分的。然而，Bulmer 提出了一个有说服力的理由[7][8]：美洲兔自身直接地或间接地导致其他物种循环。引起兔子总数十年一循环的是什么？尚无人知道。

练　　习

1. 讨论 1，2，3，4 和 8 等节给出的关于循环的各种说明。你能想出其他可能的说明吗？

2. 人们也许总想说，通过令

$$F = x(F/x) \equiv xf \qquad G = y(G/y) \equiv yg,$$

(4)式可以写成(3)的样子。这是不允许的，为什么？提示：当 $x=0$ 或 $y=0$ 时会发生什么？

3. a) 求(6)的解式。提示：$d^2x/dt^2 = dy/dt = -x$. 解常系数方程 $d^2x/dt^2 + x = 0$ 得 $x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t$，其中 c_1 和 c_2 为任意常数。然后由 $dx/dt = y$ 求 y.

b) 利用证明(6)恰好有一个临界点，而其他轨迹都是循环的部分结果，证明 2π 是每一个循环的周期。（这不是典型的具有循环族的系统。一般地，不同循环的周期不同。）

4. 解 $dr/dt = r(1-r^2)$，$r \geqslant 0$. 提示：通过写 $r^{-1}(1-r^2)^{-1}dr = dt$，再用部分分式或积分表求出通解；假设 $0<r<1$ 或 $r>1$，并各别地处理 $r=0,1$. 证明(9)的唯一的循环有周期 2π.

5. 尽管例 1 和例 2 的方程组不描述相互制约的两个物种，但可假托它们由生态

学的观点来建立和讨论轨迹。对于每一个例子，讨论短期的突然冲击的作用。

6. 设 Γ_Q^+ 为有界正半轨迹，$\Gamma_Q^+ \subset \Gamma$. 又设 $Q \in \Gamma$. 证明 $\omega(\Gamma_Q^+) = \omega(\Gamma_P^+)$. 提示：证明，如果 $(x(t), y(t))$ 是(4)的当 $a < t < b$ 时的解，那么，如果 $x_c(t) = x(t-c)$, $y_c(t) = y(t-c)$，则 $(x_c(t), y_c(t))$ 当 $a+c < t < b+c$ 时也是一个解。通过计算 $dx_c(t)/dt = dx(t-c)/dt = dx(t-c)/d(t-c) = F(x(t-c), y(t-c)) = F(x_c(t), y_c(t))$. 然后证明 $(x(t), y(t))$ 和 $(x_c(t), y_c(t))$ 定义相同的轨迹 Γ.

7. 验证例 4 的极限集。

8. 验证例 5 的极限集。

9. 证明，图 18.10 中 11 种可供选择的示意图，是仅有的 11 种可能的有界轨迹。

10. a) 证明，在条件 1～10 下，恰好有一个内部的临界点存在于总数象限中。

    b) 如果(15)满足条件 1，2，3a，4～8，9a，10a，重复 a).

11. 证明，在条件 1～10 下，内部临界点 Q 不是排斥的。提示：用(13)证明 $a < 0$ 和 $d < 0$，然后用排斥性判断法。

12. 用 Kolmogorov 循环定理的假定，验证图 18.14 中 E_1 和 E_2 上箭头的方向。

13. 在 Kolmogorov 循环定理的证明中，断言 $\omega(\Gamma_P^+) \neq \{H_1\}$，试证之。

14. 设 $f(x, y) \equiv \alpha^2 - \beta^2(x-\gamma^2)^2 - \delta^2 y$, $g(x, y) \equiv a^2 x - b^2 y - c^2$，其中 $\alpha, \beta, \gamma, \delta, a, b, c$ 为非零常数。求使条件 1，2，3a，4-8，9a，10a 和 11 都成立的这些常数。

15. 证明，如果 R 是一个有界区域，使得(4)的每一条轨迹当 t 增加时穿过 R 的边界进入 R 内，且 R 没有(4)的临界点，那么，R 至少包含一个循环。

16. a) D'Ancona-Volterra 系统是指：$dx/dt = x(a-by)$, $dy/dt = y(-c+dx)$，其中 a, b, c, d 均为正常数。证明，在总数象限内部有唯一的临界点存在，而在这个象限内部的其他轨迹都是循环。提示：证明轨迹的非参数方程为 $y^a \cdot e^{-by} x^c e^{-dx} =$ 常数。通过把 $dy/dx = y(-c+dx)x^{-1}(a-by)^{-1}$ 分离变量，积分，再取指数，能得到这些结果。证明轨迹都是循环会更困难[5]，[6]。

    b) 证明，a)的系统可以解释为没有过分拥挤作用的捕食者-被捕食者系统，其中 x 为被捕食者物种，而 y 为捕食者物种。证明条件 4 失效，以及 Kolmogorov循环定理不适用。

17. 只要有界区域含有无限多个临界点，就不能应用五重法。证明，方程组 $dx/dt = (x+y).(1-x^2-y^2)$, $dy/dt = (-x+y)(1-x^2-y^2)$ 有一个由临界点构成的圆 C，而每一个其他的解，除了在原点的临界点外，都以 C 为它的正极限集。

18. 模型 $dH/dt = r(1-(H/K))H - C(1-e^{-aH}/c)L$, $dL/dt = bc(1-e^{-aH}/c)L - dL$，表示被捕食者 H 当容纳量为 K 时有自然的逻辑增长率 $r(1-H/K)H$ 的

捕食者-被捕食者的相互制约。捕食者-被捕食者相互制约的特点在于捕食者饱食项$c(1-e^{-aH/c})L$，其中c为每个捕食者捕获被捕食者的最大比率。参数a是量度一个捕食者被喂饱的容易程度的，而dL/dt方程中的因子b是被捕食者转化为改善捕食者增长的"效率因子"。

a) 设$K=3.500$，$r=0.5$，$a=0.01$，$b=0.02$，$d=0.1$及$c=10$。证明Kolmogorov循环定理的假设被满足且有一个极限循环。

b) 讨论捕食者饱食项的意义。在这种情况下，为什么你要期望一个极限循环？

参 考 文 献

[1] F. Albrecht, H. Gatzke, A. Haddad and N. Wax, "The dynamics of two interacting populations," J. *Math. Anal. Applic.*, vol. 46, pp. 658—670, 1974. This is the definitive mathematical treatment of systems of the form of (15) under various perinent hypotheses of f and g. Contains almost none of the biological or ecological interpretations. A brief bibliography is included.

[2] W. Baltensweiler, "The cyclic population dynamics of the Grey Larch Tortix, *Zeiraphera Griseana* Hubner," in *Insect Abundnace*, edited by T. R. E. Southwood, Ed. Oxford: Blackwell, pp. 88-97.

[3] W. E. Boyce and R. C. Diprima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, 2nd ed. New York: Wiley, 1969. A very good book at the sophomore-junior level, with applications.

[4] C. J. Brand, L. B. Keith and C. A. Fischer, "Lynxresponses to changing snowshoe hare densities in central Alberta," J. *Wildlife Management*, 40(3), vol. 40, no. 3. pp. 416—428, 1976. Continuation over the winters of 1971—1975 of field studies begun earlier [25]. Field data shows the complexities of the lynx-hare interaction.

[5] M. Braun, *Differtenial Equations and Their Applications*, 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1978. This is one of the best books on the sophomore level; the presentation of the applications is especially good.

[6] ——, "Why the percentage of sharks caught in the Mediterranean Sea rose dramatically during World War 1," this volume, ch. 15. This is a slight alteration of [5, Section 4.9] and contains a good exposition of the Lotka-Volterra model.

[7] M. G. Bulmer, "A statistical analysis of the 10-year cycle in Canada," *J. Anim. Ecol.*, vol. 43, pp. 701—718, 1971. A very interesting statistical analysis of the lynx-hare and several other 10-year cycles in the Canadian forests. Discusses 8-year cycles in the Siberian taiga. A very good bibliography.

[8] ——, "The theory of prey-predator oscillations," *Theoret. Pop. Bio.*, vol. 9, pp. 137—150, 1976. Further arguments that the hare cycle [cause unknown] drives the other cycles in the Canadian woods. Discussion of Kolmogorov's Theorem.

[9] E. A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: McGraw-Hill, 1955. Remains one of the standard graduate level texts.

[10] C. S. Coleman, "Quadratic population models: Almost never any cycles," this volume, ch. 16. Shows that if f and g in (15) are linear, then only "ecologically rare" cases such as the Lotka-Volterra system of Exercise 16 will contain any cycles at all.

[11] U. D'Ancona, *The Struggle for Existence* Leiden, Bril, 1954. An interesting and readable account by the man who brought the strange increase in the numbers of selachia (sharks, skates, etc.) in the fishing areas of the Mediterranean to the attention of Volterra, who then formulated the first mathematical models of predator-prey species (see—Exercise 16).

[12] C. Elton and M. Nicholson, "The ten-year cycle in numbers of lynx in Canada," *J. Anim. Ecol.*, vol. ll pp. 215—244, 1942. Contains the data from the records of the Hudson's Bay Company. A good bibliography of the earlier sources.

[13] J. C. Frauenthal, *Introduction to population Modeling*. Birkhauser, 1980. An outstanding treatment of population modeling. Treats stochastic and time-delay models as well as the deterministic and instantaneous. (In the UMAP Expository Monograph Series.)

[14] G. F. Gause, *The Struggle for Existence*. Williams and Wilkins, 1934 (also Dover, 1971, paperback). A fascinating account of predator-prey and competing species relationships.

[15] M. E. Gilpin, "Do hares eat lynx?," *Amer. Naturalist*, vol. 107, pp. 727—730, 1973. Gilpin uses the actual data fron Elton and Nicholson to find the bestfit-

ting coefficients in his polynomial model and "proves" thaet the hare must be eating the lynx.

[16] M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic, 1974. A Very good treatment from a modern point of view, junior-senior level. Contains a good treatment of population models.

[17] L. B. Keith, *Wildlife's Ten-Year Cycle*. Madison: Univ. of Wisconsin, 1963. A thought-provoking account on a nonmathematical level of the various natural cycles in the vast Canadian forests. Should be read by anyone interested in natural cycles.

[18] A. Kolmogorov, "Sulla Teoria di Volterra della Lotta per *l'Esistenza*," *G. Ist. Ital. Attuari*, Vol. 7, pp. 74—80, 1936. Certainly one of the more inaccessible sources. See May [23], Bulmer [8], or Albrecht *et al*. [1] for discussions of Kolmogorov's Theorem.

[19] D. L. Lack, *The Natural Regulation of Animal Numbers*. Oxford: Clarendon, 1954, pp. 212—217.

[20] E. G. Leigh, "The ecological role of Volterra's equations," in *Lectures on Mathematics in the Life Sciences*, M. Gerstenhaber, Ed. Amer. Math. Soc., 1968, pp. 1—61. Gives a brief history of the equations and then presents Kerner's statistical approach.

[21] D. A. MacLulich, "Fluctuations in numbers of the varying hare (*Lepus Americanus*)," *Univ of Toronto Studies, Biol. Ser.*, no. 43, pp. 1—136, 1937. A basic source for the snowshoe hare cycle.

[22] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosystems*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973. A fascinating and readable accont. Excellent bibliography.

[23] ——, "Limit cycles in predator-prey communities," *Science*, vol. 177, pp. 900—902, 1972. A discussion of Kolmogorov's theorem. A good bibliography.

[24] J. Maynard Smith, *Models in Ecology*. Cambridge, 1974. Comparable to May [22]. Very good discussion of models. Good bibliography.

[25] C. H. Nellis, S. P. Wetmore and L. B. Keith, "Lynxprey interactions in central Alberta," *J. Wildlife Management*, vol. 36, pp. 320—329, 1972. An analysis of the lynx population in a region in Alberta, Canada. The study was quite

thorough and was carried out over the winters of 1964 — 1968. Peripheral studies of the local hare and grouse populations were also made. See also Brand *et al.* [4].

[26] M. L. Rosenzweig, "Why the prey curve has a hump," *Amer. Natur.*, vol. 103, pp. 81—87, 1969. An indication that the prey isocline may rise before it falls; argument is based on the data from an actual predatorprey system.

[27] J. Roughgarden, *Theory of Population Genetics and Evolutionary Ecology: An Introduction.* New York: Macmillan, 1979. A fasciuating introduction to biological models. The first third of the book requires only a calculus background. The later chapters take the reader to the edge of current research. Limit cycles, Kolmogorov's theoren, stochastic models, and much more are all discussed in informal terms.

[28] M. S. Weinstein, "Hares, lynx, and trappers," *Amer. Naturalist*, vol. 111, pp. 806—808, 1997. Weinstein claims that the cycles are not real but only reflect the trapping strategies of the hunters.

教 师 参 考

目的 模拟的目的是，为了总结关于山猫-兔子循环的现代思想，发展捕食者-被捕食者相互制约的通用数学模型，以及传播任何数学模型都不是完善的某些观念。数学上，模型方面提出了轨迹的极限集和有关有界轨迹的正极限的五种可能。例子和问题除向读者介绍了极限集外，还提供了一些分离变量的习惯作法。如果学生已学过高等微积分，教师可以要求他们证明有界轨迹的极限集是有界的、封闭的、连通的和不变的[16].

预备知识 变量分离法，数学上较为成熟，用相平面方法的经验。如果读者已经了解存在唯一性定理及 D'Ancona-Volterra (Lotka-Volterra)模型[6]，将是有益的。

时间 如果留一些材料给学生自学，这材料够讲 3～4 次课。

第19章

希尔伯特(Hilbert)第16问题:有多少循环?

Courtney S. Coleman *

"……风鸣琴;气压锤;小刀在金银餐具上划出的噪声;旗子在风中的飘动;水龙头间或发出的呜呜声;门的嘎嘎声;四极管多谐振荡器;……,通过氖灯的电容器脉冲放电;经济危机和传染病的周期性重复出现;偶数个动物物种生活在一起的周期性密度,其中一种物种作为另一物种的食物;花的夜间闭合;阵雨下降以后周期性的再下降;由于寒冷而发抖;行经;以及心脏的跳动。"**

1. 引　　言

在上面的引文中,Balthazar van der Pol 收集了大量不同的现象使之成为单独的系统范畴,这范畴呈现出周期性的摆动或循环,虽然没有"外部的周期力"导致这样的摆动。(然而,人们关于 van

* Department of Mathematics, Harvey Mudd college, Claremont, CA 91711.

** B. van der Pol, phil. Mag., vol. 6, ser. 7, pp. 763—765, 1928.

der Pol 的某些系统有所怀疑，比如，花的夜间闭合的确是由于黑暗和光亮的昼夜循环所致。）按照 van der Pol 的文章，其中许多系统都可以在某种程度上以形如

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=X(x,y)\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=Y(x,y)\end{cases}\tag{1}$$

的一对微分方程作模型。记号 x 和 y 表示被模拟的基本量的大小。比如，x 可表示氖灯的电容器两端之间的电压，而 y 表示电压改变时的放电量。或者，像在第 4 节将看到的，x 和 y 可以表示捕食者和被捕食者的总数密度。不过，暂时我们简单地假设微分方程组(1)是已知的，并且我们对呈现在解集中的任一个循环感兴趣。（关于循环的定义见第 2 节。一个系统具有"外部周期力"的例子，见练习 1.）

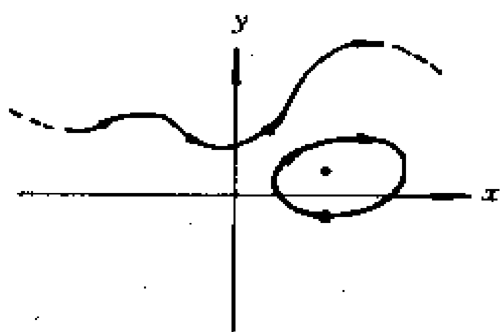


图 19.1　(1)的轨迹的三种类型

特别地，我们假定 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 对于一切 x 和一切 y 关于变量 x 和 y 两者都是连续可微的。一个函数对 $x=x(t)$ 和 $y=y(t)$，如果满足下述条件，就称为(1)的一个解。

(1)函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 定义在公共的开区间 $I: a<t<b$ 上，a 可以为 $-\infty$ 而 b 可以为 $+\infty$.

(2)函数 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 I 上连续可微，且对于每一个 $t\in I$，满足方程组(1)：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}=X(x(t),y(t)),\\[2ex]\dfrac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}=Y(x(t),y(t)).\end{cases}$$

(3)没有定义在一个区间 I^* 上的函数 $x^*(t)$和 $y^*(t)$，其中 $I^*\supset I$ 但 $I^*\neq I$，在 I 上，它们分别地与 $x(t)$和 $y(t)$一致，且对于 I^* 中的一切 t 满足方程组(1).

最后一个条件意味着，我们只着眼于(1)的**最大时间区间上的解**。例如，$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x$ 的解 $x(t)=e^t$，$-\infty<t<\infty$，是合格的，而"解"$\tilde{x}(t)=e^t$，$1<t<2$，则不合格，因为很清楚，我们可以延伸时间区间。

(1)的每一个解 $x=x(t)$，$y=y(t)$，在 xy 平面上定义一条曲线 Γ，称为解的**轨迹**。我们将不加证明的假设：

(i)除非一致，不然不会有两条轨迹是相交的；

(ii)一条轨迹，或是一条不自交的曲线，或是一条简单闭曲线，或是一个单点(临界点)。

关于类似于"存在唯一性"定理的证明，见 Hirsch 和 Smale 的[13]. 列举在(ii)中的三种典型轨迹的例子，见图 19.1. 箭头表示轨迹是怎样随 t 的增加描划出来的。

不同的解可以产生相同的轨迹。例如，方程组

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=y,\qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-x$$

有解对

$$x_1(t)=\cos t,\qquad y_1(t)=-\sin t,$$
$$x_2(t)=\cos(t-\pi/3),\qquad y_2(t)=-\sin(t-\pi/3),$$

它们定义同一条轨迹 Γ：单位圆 $x^2+y^2=1$.

2. 循　　环

(1)的非常数解 $x=x(t)$，$y=y(t)$称为一个循环或周期解，如果存在一个正数 T(循环的周期)使得对一切 t

$$x(t+T)=x(t)\qquad 和\qquad y(t+T)=y(t).$$

我们也将对应于 xy 平面中的轨迹称为一个循环。无疑，它是一条简单闭曲线。反之，任一条轨迹为一简单闭曲线时就对应于一个周期解。（这似乎是显而易见的，我们将省去正式的证明。见 Hirsch 和 Smale 的[13]。）现在，我们给出几个像(1)那样形状的具有循环的方程组的例子。应该再强调一次，出现的任一个循环确实都是通过"x 物质"和"y 物质"的交互作用在内部产生的。它们不可能是由于某些外部的、周期地变化的原因，因为(1)的右边全然没有明显地依赖于时间，更不用说周期地依赖了（见练习 1）。

例 1 （无穷多个循环）要解方程组

$$\frac{dx}{dt} = y, \qquad \frac{dy}{dt} = -x \tag{2}$$

是不难的。比如，微分第一个方程，再应用第二个，得

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dy}{dt} = -x,$$

即

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0. \tag{3}$$

方程(3)为一个二阶常系数常微分方程，它的通解为

$$x(t) = c_1\cos t + c_2\sin t, \tag{4}$$

其中 c_1 和 c_2 为任意常数。利用三角恒等式

$$a\cos\theta + b\sin\theta = A\cos(\theta - \delta),$$

（其中 $A = (a^2 + b^2)^{1/2}$，$\cos\delta = a/A$，$\sin\delta = b/A$.）可以把(4)重新写成更简单的形式

$$x(t) = A\cos(t - \delta). \tag{5}$$

其中 A 与 δ 为任意常数。利用(2)的第二个方程，得(2)的每一个解具有形式

$$\begin{cases} x = x(t) = A\cos(t - \delta), \\ y = y(t) = -A\sin(t - \delta), \end{cases} \tag{6}$$

其中 A 和 δ 为某些常数。如果 $A \neq 0$，则对应的轨迹是半径为 $|A|$、

中心在原点的圆(注意到 $x^2(t)+y^2(t)=A^2$). 见图 19.2.

如果 $A=0$,则得临界点 $(0,0)$,它也是(2)的一个解。注意到(2)的所有轨迹,除了唯一的临界点外,都是循环。图 19.2 中轨迹上的箭头,依然表示当时间前进时轨迹是怎样描划出来的。

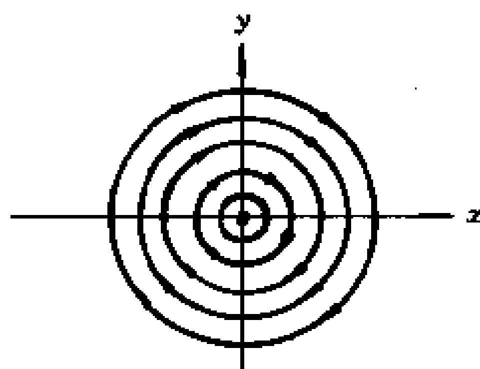


图 19.2 $dx/dt=y, dy/dt=-x$ 的循环

使 $X(x_0,y_0)=0$ 和 $Y(x_0,y_0)=0$ 的任一点 (x_0,y_0),都是(1)的临界点。这样的点确定(1)的一个解,这是因为

$$\frac{dx_0}{dt}\equiv 0 = X(x_0,y_0), \frac{dy_0}{dt}\equiv 0 = Y(x_0,y_0).$$

因为每一个循环的内部至少有一个临界点(这事实的证明稍许困难些,见 Hirsch 和 Smale 的[13].),于是,临界点在研究(1)的循环中,扮演了一个重要角色。例 1 的方程组有一个临界点一实际上,一定有一个,因为它有循环—象下述的大部分例子那样。

例 2 (单个循环)设 r 和 θ 为通常的极坐标

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta \tag{7}$$

并考虑极坐标方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dr}{dt} = r(1-r^2), r\geqslant 0 & \text{(8a)}\\[2ex] \dfrac{d\theta}{dt} = 1. & \text{(8b)}\end{cases}$$

首先,以直角坐标 xy 表示(7). 由(7)得到

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\cos\theta-r\sin\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(1-r^2)r\cos\theta-r\sin\theta\\ \quad=(1-x^2-y^2)x-y\\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\sin\theta+r\cos\theta\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=(1-r^2)r\sin\theta+r\cos\theta\\ \quad=(1-x^2-y^2)y+x.\end{cases}\tag{9}$$

其中用到了链式法则，比如，$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\cos\theta)=(\mathrm{d}/\mathrm{d}\theta)\cos\theta(\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t)$. 注意到，(8)的任一解$(r(t),\theta(t))$，给出(9)的一个解$(x(t),y(t))$. 反之，如果利用

$$r=(x^2+y^2)^{1/2},\tan\theta=y/x.\tag{10}$$

则(9)的一个解也确定(8)的一个解。

可是，(8)比(9)更容易解一些。事实上，我们有

$$\begin{cases}r(t)=\dfrac{r_0}{[r_0^2+(1-r_0^2)e^{-2t}]^{1/2}}, & r_0\geqslant 0, \quad (11\text{a})\\ \theta(t)=t+\theta_0, & \theta_0\text{ 任意。} \quad (11\text{b})\end{cases}$$

关于$r(t)$的解法，留给读者(练习 2)，这只要将(8a)分离变量就可以得到。至于$\theta(t)$的方程由(8b)直接得到。注意到，我们已经假设了在$t=0$处，$r=r_0$以及$\theta=\theta_0$.

如果$r_0=1$则$r(t)=1$，而如果$r_0=0$，则$r(t)=0$. 如果$0<r_0<1$，那么，从(11a)看出，当$t\to\infty$时，$r(t)$单调递增到1，而如果$1<r_0$，那么，当$t\to\infty$时，$r(t)$单调递减到1. 在直角坐标下，$r(t)\equiv0$对应于一个临界点$x=0,y=0$，而$r(t)\equiv1,\theta(t)=t+\theta_0$，对应于

$$x(t)=\cos(t+\theta_0),y(t)=\sin(t+\theta_0),$$

这是单位圆的参数方程。

于是，方程组(9)有唯一的临界点(在原点)以及唯一的沿着单位圆的循环。关于轨道的示意图见图 19.3. 因为方程组(9)的右边为x和y的三次多项式，所以它被称为**立方系统**。再注意到，循环是渐近稳定的，因为所有"附近的"轨迹，当时间增加时，都趋近于

循环。事实上，在这个例子中，除了临界点外，所有的轨迹都趋近于循环。

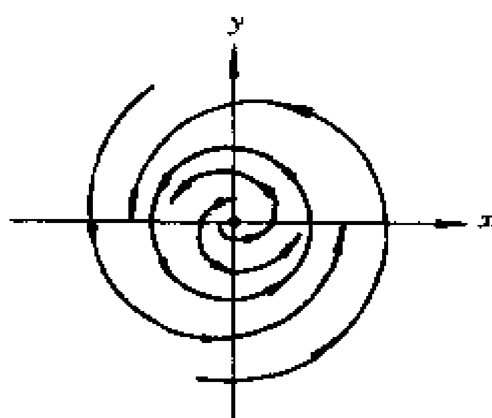


图 19.3　单个循环

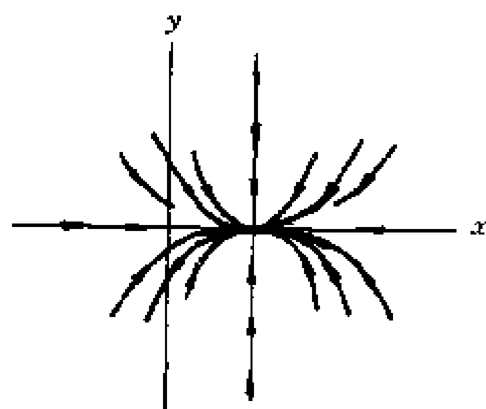


图 19.4　根本没有循环

例 3　（没有循环）方程组

$$\frac{dx}{dt} = -x + 1, \frac{dy}{dt} = -2y \tag{12}$$

用分离变量容易解出（练习 3）

$$x(t) = 1 - (1 - x_0)e^{-t}, y(t) = y_0 e^{-2t}.$$

根本没有循环存在，而在(1,0)处有唯一的临界点存在。我们把它留给读者去证明（练习 3），轨迹的示意图如图 19.4 中所示。

例 1 的每一个循环不同于例 2 的循环，因为后一种循环"孤立"于同一个方程组中的其他循环——实际上，不存在别的循环。更确切地说，对于(1)的一个循环 Γ，如果存在一个正数 a，使得由

$$A = \{(x,y):(x,y) \text{ 到 } \Gamma \text{ 的距离小于 } a\}$$

定义的中线在 Γ 上的环状域 A，不含有另外的循环，那么，就称循环 Γ 为孤立的。在这个定义中，(x,y)到 Γ 的距离为

$$\min_{(u,v)\in\Gamma} ((x-u)^2 + (y-v)^2)^{1/2}.$$

可以证明，这种最小始终存在，除非(x,y)位于 Γ 上，不然还是正的。如果每一个中线在 Γ 上的环状域至少含有一个其他循环，循

环 Γ 就不是孤立的。根据这些定义，很明显，例 1 的每一个循环都不是孤立的，而例 2 的循环是孤立的。

例 4 （N 个孤立循环）极坐标方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = r(1-r^2)(4-r^2)\cdots(N^2-r^2), r \geqslant 0, N \text{ 为正整数} \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 1. \end{cases} \tag{13}$$

对应于一个直角坐标形式的方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = X(x,y) \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = Y(x,y). \end{cases} \tag{14}$$

其中 $X(x,y)$ 和 $Y(x,y)$ 为 x 和 y 的 $2N+1$ 次多项式（练习 4）。方程组有唯一的临界点，即原点，N 个孤立循环，即

$$r \equiv 1, r \equiv 2, \cdots, r \equiv N,$$

没有非孤立循环。读者将证明这些事实（练习 4）且验证图 19.5 中轨迹示意图的正确性。

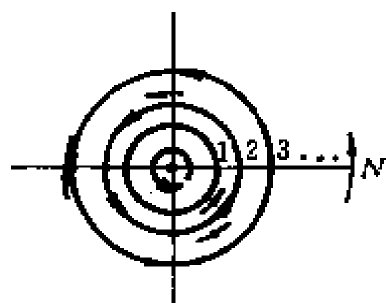


图 19.5　N 个孤立循环

这些例子表明，循环确实存在，至少可以说，构造一个具有循环的形如（1）的方程组并不太困难*。问题是，已知一个形如（1）的方程组，能有多少孤立的循环？（具有一个非孤立循环的方程组一定有无限多个循环——练习 5.）这就把我们引到希尔伯特的第 16 问题上去了。

---

* 例子中的循环是圆，但不一定都是这种情况。实际上，循环的形状可能是十分复杂的——除非 X 和 Y 都是 x 和 y 的二次多项式，二次多项式情况的循环必定围住一个凸区域。例子中每一个循环的内部只有一个临界点。同样，除二次的情况外，这也不是普遍成立的。

3. 希尔伯特的第 16 问题

下述问题是由希尔伯特于 1900 年提出，并且尚未解决的。

"……我愿意公开一个问题，看来，它可用系数的连续变动的……方法来着手解决，而它的答案对于由微分方程确定的曲线族的拓扑性质颇有价值。这是关于形如

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Y}{X}$$

的一阶微分方程的 Poincare 的边界循环(极限循环)的位置和最大个数问题，其中 X 和 Y 都是 x 和 y 的 n 次有理整函数……"

"有理整函数"是指多项式

$$\sum_{i+j=0}^{n} a_{ij}x^i y^j \equiv a_{00}+a_{10}x+a_{01}y+a_{20}x^2+a_{11}xy+\cdots+a_{0n}y^n. \tag{15}$$

"Poincare 的边界循环(极限循环)"是我们的孤立循环*。我们将研究(1)而不是 $dy/dx=Y/X$，它可将(1)相除后得到。

这个问题是希尔伯特于 1900 年在巴黎的第二次世界数学家代表大会上，提出的 23 个问题中第 16 个问题的第二部分。在大会开幕词中，希尔伯特说：

"……历史使我们认识到科学发展的连续性。我们知道，每个时代有它自己的问题，这些问题，跟随着时代或者解决了，或者当作废物抛弃了，而被新的所代替。如果我们要获得在不久将来数学知识可能有的发展的概念，

---

* Poincare(也很可能是希尔伯特)在他的极限循环中包含循环图，但我们不。一个循环图(奇异的或分隔的循环)是一条闭曲线，它是临界点和轨道连贯的定向的结合。见前一章。

就必须在我们的心目中回顾一下尚未解决的问题，并且考察一下现代科学所提出的有待于将来解决的难题。为此，重温处于两个世纪会合时的现代难题，看来是相当合适的。一个伟大时代的结束，不仅吸引我们回顾过去，而且把我们的思想对准未知的将来。"

一些希尔伯特问题几年内就被解决了，有些好容易到近来才解决（第10个问题由20岁的苏联数学家Matiyasević于1970年解决），而少数几个仍未解决。关于希尔伯特问题的原始一览表它们的现状，见[12a]～[12c].

返回到希尔伯特在他的第16问题提出的多项式系统孤立循环的最大个数问题，首先定义$\mathscr{F}_n$为次数不大于n的所有实多项式的集合。于是，当$n=1,2,\cdots$时，$\mathscr{F}_{n-1}\subset\mathscr{F}_n$. 这是因为形如(15)的多项式中次数恰好为$n$的所有项的系数可以为零。1923年，Dulac[11]证明了，给定一个特定的n和$\mathscr{F}_n$中的X和Y，方程组(1)存在K(有限数)个循环，K与n和X,Y的选择有关。对于每一个固定的n，刚才的K可以是多大的问题，引导我们定义如下的希尔伯特数$H(n)$，$n=0,1,2,\cdots$：

$$H(n)=\underset{X,Y\in\mathscr{F}_n}{\text{上确界}}\{\text{方程组(1)孤立循环的个数}\}。$$

于是，对于特定的n，有限数$H(n)$，意味着存在$\mathscr{F}_n$中的多项式X和Y，使方程组(1)恰好有$H(n)$个孤立循环。另一方面，对于特定的n，$H(n)=\infty$，这意味着，关于每一个整数K，存在$\mathscr{F}_n$中的多项式X和Y，使得方程组(1)至少有K孤立循环。这同Dulac的结果不矛盾(为什么不矛盾?)

由于$\mathscr{F}_{n-1}\subset\mathscr{F}_n$，从而$H(n-1)\leqslant H(n)$. 由此及例子4给出的关于奇整数$n$的结果，我们断定，关于整数$n=0,1,2,\cdots$

$$H(n)\geqslant\left[\frac{n-1}{2}\right],$$

其中$[a]$表示不大于a的最大整数。因此，当$n\to\infty$时，$H(n)\to\infty$，

而且，如果 $H(n_0)=\infty$，则当 $n\geqslant n_0$ 时，$H(n)=\infty$.

证明 $H(0)=H(1)=0$ 是不困难的（练习 7）。第一个有可能是非平凡希尔伯特数[即 $H\neq 0,\infty$]的是 $H(2)$. 下面，Chin（秦元勋）[6]给出了一个二次系统（即 $n=2$），具有一个孤立循环的例子，这意味着 $H(2)\geqslant 1$：

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=-1-2y+x^2+xy+y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=2x-x^2.\end{cases}$$

读者可以验证 $x^2+y^2=1$ 确定了这个系统的一个循环（练习 8），但这个循环是孤立的证明省略了。1939 年，Bautin 宣布 $H(2)\geqslant 3$，但是，由于严酷的第二次世界大战，证明延迟到 1952 年才发表[3]。事实上，Bautin 的构造导致一种感觉，$H(2)$ 正好是 3，从而二次系统至多不过有三个孤立循环.

20 世纪 50 年代中期，Petrovskii 和 Landis 的一组深刻的论文[21]～[23]“证明”了 $H(2)=3$ 且对于 $n>2$，

$$H(n)\leqslant\begin{cases}\dfrac{1}{2}(6n-7n^2-11n+6), & \text{如果 } n \text{ 为奇数}\\ \dfrac{1}{2}(6n-7n^2+n+4), & \text{如果 } n \text{ 为偶数。}\end{cases}\tag{16}$$

这个发现是解决这个问题的第一流贡献，剩下的事情只是要看看当 $n>2$ 时，这些上界是否可以减小以确定 $H(n)$ 自身。不幸得很，1967 年 S. P. Novikov 找出了一个关键性引理证明中的错误、从而两人的论文必须撤回，整个问题重新回到未被解决的状态[24]。

尽管 1967 年以后，这问题远非简单已显而易见，但仍希望 $H(2)$ 的结果还是 3。1979 年，由于 Shi（史松龄）的[25]和 Chen（陈兰荪）与 Wang（王明淑）的[5]，这个希望破灭了。利用 Chin 的[6]，[7]，Tumg（董金柱）的[28]和 Yeh（叶彦谦）的[31]、[32]等中的结果和技巧，他们发现至少有四个孤立循环的二次系统；因此我们有

$$H(2) \geqslant 4.$$

这些系统如下：

$$(\text{Chen}, \text{Wang})\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\delta_2 x - y - 3x^2 + (1-\delta_1)xy + y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + \dfrac{2}{9}x^2 - 3xy, \end{cases}$$

其中 δ_1 和 δ_2 是小正数，

$$(\text{Shi})\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \lambda x - y - 10x^2 + (5+\delta)xy + y^2 \\ \dfrac{dy}{dt} = x + x^2 + (-25 + 8\varepsilon - 9\delta)xy. \end{cases}$$

其中 $\lambda = -10^{-200}$，$\delta = -10^{-13}$，$\varepsilon = -10^{-52}$. 这四个有名的孤立循环的相对位置，对于每一个系统都是相同的，三个循环包围着临界点(0,0)，而第四个循环包围着临界点(0,1)。见图 19.6. 这些系统是否还有别的孤立循环，现在尚未知道。这些结果，都不在这里证明了. 希望更深入地研究这一切的读者，首先需要熟悉 Poincare-Bendixson 定理（见 Hirsch 和 Smale 的[13]）。关于二次系统的详细资料，可以在参考文献中列出的 Chin，Tung 和 Yeh 等的论文中得到。Coppel[10]总结了大部分已知结果，包括如下的：

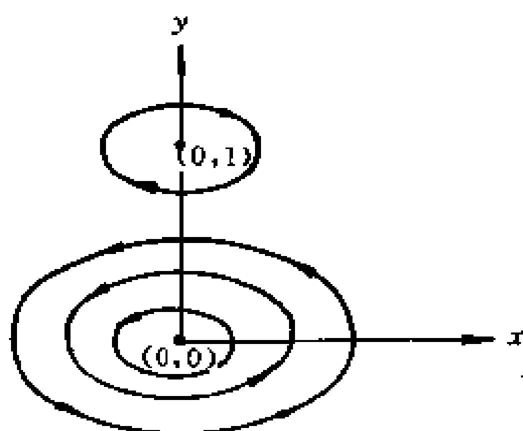


图 19.6 [5]、[25]的二次系统的四个孤立循环

(1) 二次系统的每一个循环围成包含单一的临界点的凸区域。

(2) 在二次系统中，围绕一个公共临界点的循环，有共同的走向（当 t 增加时），而那些围绕性质不同的临界点的循环，具有相反的走向。

于是，前者解决了二次系统循环的可能形状问题；后者暗示二次系统至多不过有两个眼（即，至多不过两个临界点，每一个这种点被一个或更多的孤立循环包围着）。事实上，Chen 和 Wang 及 Shi 的例子，确实有两个眼，这样，对于二次系统来说，循环的可能的样子和相对位置是知道了，然而，对于 $H(2)$，甚至是不是有限都还不知道。

当 $n>2$ 时，情况并不更清楚。Sibirskii[27]和 Shi[25]已经证明 $H(3)\geqslant 5$. 当 $n\geqslant 6$ 时，Otrodov[20]得到了比起由例 4 导出的 $[(n-1)/2]$ 好得多的 $H(n)$ 的下界

$$H(n)\geqslant\begin{cases}\frac{1}{2}(n^2+5n-14), & n \text{ 为偶数}, \\ \frac{1}{2}(n^2+5n-26), & n \text{ 为奇数}。\end{cases}$$

在 Otrokov 的推导中，他构造（不明显地）了一个具有形成一个单眼的已知孤立循环的多项式系统。另一方面，Il'jasenko[14]已经证明，对于任何 n，在 $\mathscr{F}_n$ 中存在 X 和 Y 使得方程组(1)至少有内部相互分离的 $(1/2)(n-1)(n+2)$ 个眼。当 $n>2$ 时，眼的最大个数仍不知道，眼中含有眼（即不只是包围着唯一一个临界点的眼）的何种复杂样式可能存在也不知道。

4.　一个生态学的解释

我们再回到 van der Pol 当初提到的自然现象上来。特别，设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 表示两种相互制约物种各自的群体密度（即栖息处每单位面积或体积上的个数）。对于确定的时刻 t，假设 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在栖息地的每一个子区域上是相同的，即，假设分布是均匀的。一种物种可能是以另一种为食物的捕食者，或者可能是二者为了公共的有限供应的食物来源而竞争，或者可能发生两种物种间某些

其他更奇异的相互制约的形式。

比

$$\frac{\mathrm{d}x(t)/\mathrm{d}t}{x(t)} \quad 和 \quad \frac{\mathrm{d}y(t)/\mathrm{d}t}{y(t)}$$

为两种物种的**相对变化率**。这些相对变化率的每一个，都等于相应物种的**相对出生率**和**相对死亡率**之间的差

$$\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=B_1(x,y)-M_1(x,y)\equiv f(x,y)$$

$$\frac{1}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=B_2(x,y)-M_2(x,y)\equiv g(x,y). \tag{17}$$

注意到，我们已经假设相对变化率依赖于群体密度，而不明显地依赖于时间。这个假设在许多相互制约的实际系统中，看来是近似地正确的。依旧，(17)的任一个循环一定是在内部产生的，而不是由于外部的周期力。自然，在第1节中，我们作了同样的假设。依旧，假定$x(t)$，$y(t)$，$f(x,y)$和$g(x,y)$为它们的变量的连续可微函数。

大量的争论存在于函数$f(x,y)$和$g(x,y)$的精确性质上，自然，函数的形式取决于相互制约的特征。例如，假设y物种是食物物种x的主要捕食者。在这种情况下，人们可能期望$f(x,0)>0$，因为在没有捕食者的情况下，可以期望食物物种有一个正的相对增长率。另一方面，如果x充分大，我们就可能有$f(x,0)<0$，这常常说明，即使没有捕食者活动，要栖息地上的过密现象也起有害作用。即然这样，看来，假设$f(x,y)$对于每一个x都是y的递减函数是合情合理的，因为物种y捕食物种x. 类似的论证适用于相对变化率函数g.

在任何情况下，一对相互制约的物种的基本的变化率方程取为

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = xf(x,y), \\ \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = yg(x,y). \end{cases} \tag{18}$$

由于把 x 和 y 看作群体密度，故我们只对(18)在象限 $x\geqslant 0, y\geqslant 0$ 中的解感兴趣。本章所研究的基本问题是，是否存在这样的两种相互制约的物种系统，它可以用形如(18)的微分方程组作为模型，并具有一个或更多的孤立循环*。

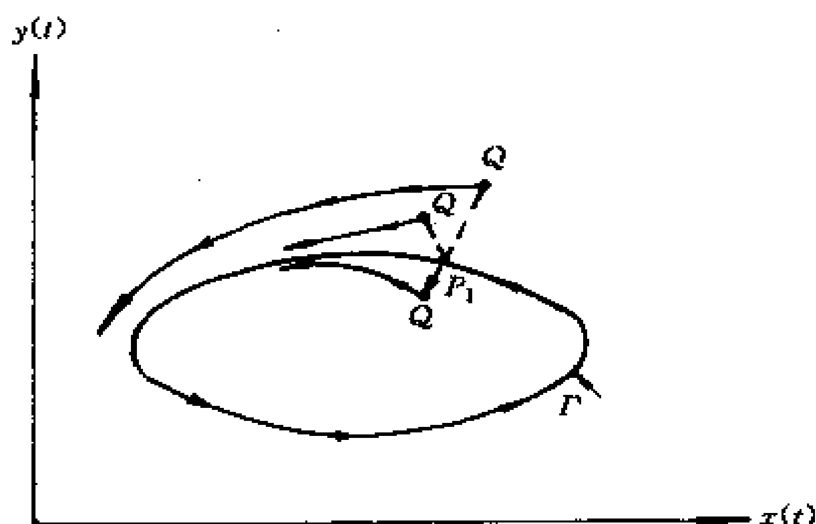


图 19.7　生态稳定循环

我们来概述一下这样的论点，只要是完全合适地在“自然的”安排下循环，就一定是孤立的，而且事实上还是生态稳定的，所谓生态稳定如下所述。一个“自然的”循环，持续一段长时间后，应该或多或少不受“现实世界”不可避免的冲击而扰动的影响。如果一个扰动在时刻 t_1 突然地使一群体密度点 $P_1(x_1,y_1)$ 自这样的循环 Γ 偏离到附近的点 Q，而扰动迅速地中止，那么，随着时间的推移，通过 Q 的轨道将移回到靠近 Γ. 这样的循环就是**生态稳定**的(见

* 如果(18)有孤立循环并且 f 和 g 二者皆为多项式，则 f 和 g 的次数至少是二
[29],[8].

图 19.7)。数学上的术语是渐近轨道稳定性，不过，在此我们不想给出它的正式定义了。看来只有生态稳定循环才能在自然界中存留。

生态稳定循环 Γ 一定是孤立的。如果它不是孤立的，那么，一个突然的冲击，可以驱使 Γ 上的一个群体密度点 P，进到不同振幅、或者周期不同的相异的循环上的点 Q^*. 一旦在新的循环上，群体密度点便保留在那里，除非有新的冲击，把密度点送到另一个循环上。不管怎样，我们确实没有逐渐返回到原来的循环 Γ 上去。因此，如果 Γ 不是孤立的，它也就不是生态稳定的。见图 19.8.（警告：一个孤立循环未必是生态稳定的(见练习 9)。）

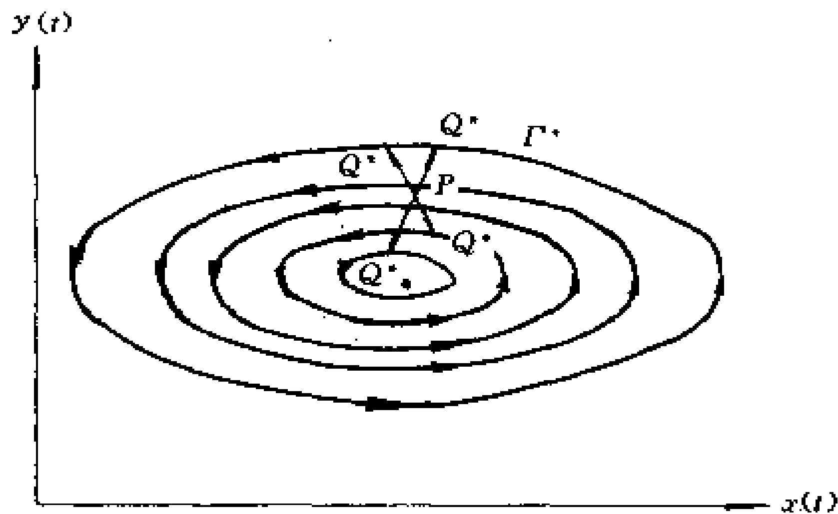


图 19.8　非孤立循环不是生态稳定的

已经研究了若干自然界的捕食者-被捕食者群落，每一个都具有生态稳定循环。加拿大的山猫-美洲兔系统，至少在近两个世纪来有惊人的规律性，保持了十年一循环[9],[15],[17],[19]。不寻常的阿尔卑斯山脉的芽蛾-落叶松树的循环[2]和(北极的)旅鼠-植被的循环[16]似乎是非常确实的。其他一些循环已在实验室里确定了。这些情况中的每一种循环，可认为是由两物种自身间的相互制约这内部作用所产生的，而不是像天气循环那样的外部的周期的原因

所造成的。涉及山猫-兔子循环的详细论证见 Keith 和 Bulmer 的[10][4]；也见[9]。van der Pol 提到的大部分系统，也具有孤立的且生态稳定的循环。

一般认为，这些系统的每一个，用形如(18)的方程来模拟是合适的*。在此，我们不打算讨论 f 和 g 可能的各种类型了。见[17]，[19]，[9]。现在，我们能用公式表示希尔伯特第 16 问题中提出的生态学问题了。**是否存在自然界的(或实验室的)捕食者-被捕食者系统，其中至少有两个生态稳定循环？答案至今尚不清楚。**

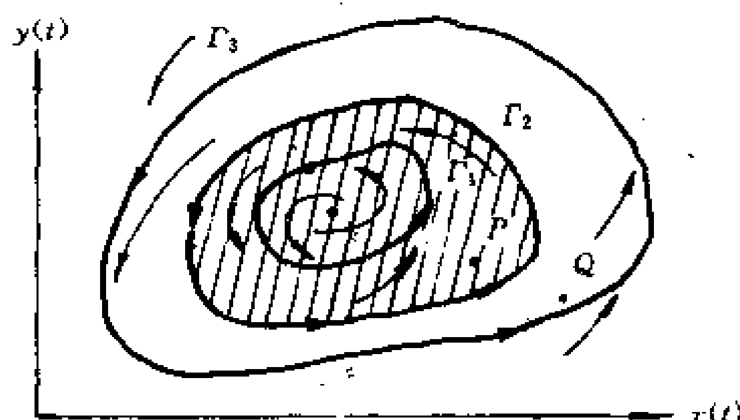


图 19.9　两个生态稳定循环及在其间的非稳定循环

假设自然界的系统存在两个生态稳定循环，那么轨迹可能配置得如图 19.9 所示。现在，设 Γ 为一个生态稳定循环，它的吸引范围是使得通过 P 点的轨迹当 $t\to\infty$ 时趋于 Γ 的所有这样的 P 点集合。图 19.9 的阴影区域是 Γ_1 的吸引范围。在同一个图中，Γ_3 的吸引范围由 Γ_2 的所有外部点所组成。

可是，为什么这样的自然界系统的群体密度轨迹，能够从一个循环的吸引范围移动到另一个循环的吸引范围？这情况可能通过对系统的一个巨大冲击而产生，这冲击驱使系统从点 P(比如说在

* 近来的资料指出，形如 $dx(t)/dt=x(t-\alpha)f(x(t-\alpha),y(t-\beta))$ 的微分延滞方程及关于 dy/dt 的类似的方程，会更准确。见 May 的[17]。

时刻 t_1)到达点 Q. 自然，这都是假想的，不过，至少可以想象到，自然界的系统可能按这种方式行动。

5. 三个几乎不可能解决的题目

A. 求 $H(2)$.

B. 利用计算机求二次系统

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=a_0+a_1x+a_2y+a_3x^2+a_4xy+a_5y^2,\\ \dfrac{dy}{dt}=b_0+b_1x+b_2y+b_3x^2+b_4xy+b_5y^2\end{cases}\tag{19}$$

的数值解，其中系数是 Chen 和 Wang 或 Shi 在确定四个已知的循环时用过的。还有其他循环吗?

C. 在自然界中找一个或在实验室中构造一个至少有两个生态稳定循环的捕食者-被捕食者或其他相互制约的系统。

显然，A. 十分深奥，非常困难，而且大概不会马上得到解决。B. 稍微容易些，但要求有计算员的某些经验。换句话说，人们可以研究一般的二次系统(19)；不过，系数的数字可以从 12 减少到 6. 先读一下[10]。至于问题 C，在工程实验室中利用二极管的适当组合，或在化学实验室中利用相互作用的化合物，或在具有合适的小生物的生物实验室中，都是做得到的。

练 习

1. 系统 $dx/dt=y, dy/dt=-4x+\cos t$ 是由外部周期力 $x\equiv 0, y\equiv \cos t$ 引起的. 证明这系统有一个与外部力有相同周期 2π 的循环。提示：注意到 $d^2x/dt^2=dy/dt=-4x+\cos t$。这样，只需求周期为 2π 的 $(d^2x/dt^2)+4x=\cos t$ 的解 $x(t)$ (试一下形如 $x(t)=a\cos t$ 的解)。那么，所求的循环将由 $x(t)$ 和 $y(t)=dx(t)/dt$ 确定。
2. 证明，(11a)给出(8a)的一切解。提示：$r\equiv r_0\equiv 0$ 和 $r\equiv r_0\equiv 1$ 也看作解。然后假

设 $r_0\neq 0,1$(因而 $r(t)\neq 0,1$)且把微分方程写成 $\mathrm{d}r/r(1-r^2)=\mathrm{d}t$. 利用部分分式或积分表，注意区别 $0<r<1$ 和 $r>1$ 的情况，积分而得形如 $f(r,r_0)=t$ 的表达式(对 r 从 r_0 到 r 积分，对 t 从 0 到 t 积分)。再解出 r 作为 t 的函数。

3. 解(12)。提示：写成 $\mathrm{d}x/(-x+1)=\mathrm{d}t, \mathrm{d}y/y=-2\mathrm{d}t$ 并积分之。验证图 19.4.

4. 证明在(14)中 $X(x,y)\equiv x(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2)\cdots(N^2-x^2-y^2)-y$, $Y(x,y)\equiv y(1-x^2-y^2)(4-x^2-y^2)\cdots(N^2-x^2-y^2)+x$. 从而证明 X 和 Y 为 x 和 y 的 $2N+1$ 次多项式。提示：仿照例 2 中用过的技巧。验证例 4 得出的断言。

5. 由定义直接证明，一个具有非孤立循环的系统，一定有无穷多个循环。

6. 证明系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=x\sin(x^2+y^2)-y, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=y\sin(x^2+y^2)+x$ 有无穷多个孤立循环。提示：用极坐标，并求出 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ 和 $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$. 为什么不能运用希尔伯特第 16 问题?

7. a) 通过解 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=b$，证明 $H(0)=0$，其中 a 和 b 均为常数。

   b) 证明 $H(1)=0$. 提示：考虑线性系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a_1x+a_2y, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=b_1x+b_2y$. 假定系统有一个周期解 $x_1=x(t), y_1=y(t)$ 及轨迹 Γ_1，证明，对于任意常数 c，$x_2=cx(t), y_2=cy(t)$ 也是一个周期解，因而 Γ_1，不是一个孤立循环。然后推广到一般的线性系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=a_0+a_1x+a_2y, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=b_0+b_1x+b_2y$.

8. 通过证明如果 $x^2+y^2-1=0$ 则 $x(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)+y(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t)=0$，再证明 $x^2+y^2-1=0$ 为系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=-1-2y+x^2+xy+y^2, \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=2x-x^2$ 的一条轨迹。

9. 证明系统(在极坐标下)，$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=r(r^2-1), \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=1$ 有一个孤立循环，且这个循环是生态不稳定的。提示：和例 2 对比。

10. 证明系统(在极坐标下)$\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=r(1-r^2)(4-r^2)(9-r^2), \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=1$，有两个被一个非生态稳定的孤立循环隔开的生态稳定孤立循环。

11. 证明，在极坐标下的系统 $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t=rf(r), \mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t=1$ 中，适当地选择函数 $f(r)$，人们可以构造几乎任何想要的孤立的、不孤立的或 n 个孤立的和不孤立的循环的配置，且所有这些循环都是中心在原点的圆。

12. a) (Bendixson 的负准则)证明，如果 $\partial f/\partial x+\partial g/\partial y$ 有确定的符号且在平面区域 R 中不为零，那么，系统 $\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=f(x,y), \mathrm{d}y/\mathrm{d}t=g(x,y)$ 不可能有整个落在 R 内部的循环(假定 f 和 g 为处处连续可微的)。提示：如果系统确实有循环 $\Gamma\subset R$，而 A 为 Γ 的并集及其内部，应用平面上的 Green 定理于 $\iint_A(\partial f/\partial x+\partial g/\partial y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. 证明，如果 Γ 有周期 T，则这个积分不为零，但这积分 $=\oint g\mathrm{d}x-f\mathrm{d}y=\int_0^T(g(\mathrm{d}x/\mathrm{d}t)-f(\mathrm{d}y/\mathrm{d}t))\mathrm{d}t=0$.

b) 找出不可能含有二次系统(19)的任何循环的半平面

参 考 文 献

[1] F. Albrecht, H, Gatzke, A. Haddad and N. Wax, "The dynamics of two interacting populations," *J. Math. Anal, Applic.*, vol. 46, pp. 658—670, 1974. This is the definitive mathematical treatment of systems of the form of (18) under various pertinent hypotheses on f and g. Contains almost none of the biological or ecological interpretations. There is a brief bibliography.

[2] W. Baltensweiler, "The relevance of changes in the composition of larch budworm populations for the dynamics of its numbers." in *Dynamics of Populations*, P. J. den Boer and G. R. Gradwell, Eds. Wageningen; Centre for Agricultural Publishing and Documentation, 1971, pp. 208—219.

[3] N. N. Bautin. "On the number of limit cycles which appear with the variation of coefficients from an equilibrium position of focus or center type," *Mat. Sb.*, vol. 30(72), pp. 181—196, (1952). English translation in *Amer. Math. Soc. Transl.*, no. 100(1954). A research level paper containing very detailed analysis.

[4] M. G. Bulmer, "A statistical analysis of the 10-year cycle in Canada," *J. Anim. Ecol.*, vol. 43, pp. 701—718, 1971. A very interesting statistical analysis of the lynx—hare and several other 10-year cycles in the Canadian forests. Discusses 8-year cycles in the Siberian taiga. A very good bibliography.

[5] Lan Sun Chen and Ming-Shu Wang, "The relative position and number of limit cycles of a quadratic differential system," *Acta Math. Sinica*, vol. 22, pp. 751—758, 1979. A straightforward but somewhat advanced account of the most recent work on quadratic systems with an example showing that $H(2) \geqslant 4$.

[6] Yuan-Shun Chin, "On the algebraic limit cycles of second degree of the differential equatiof …," *Acta Math. Sinca*, vol. 8, pp. 23—35, 1958. An English translation appears in *Chinese Math.*, vol. 8, pp. 608—619, 1966. An illuminating study of quadratic systems with elliptical isolated cycles.

[7] —, "Concrete examples of the existence of three limit cycles for the system …," *Acta Math. Sinica*, vol. 9. pp. 213—336, 1959. In English translation in *Chinese Math.*, vol. 9, pp. 521—534, 1967. A detailed presentation of a specific

quadratic system with three isolated cycles enclosing a signle critical point. Pu Fu-quan assisted with the prepara tion of this paper.

[8] C. S. Coleman, "Quadratic population models; Almost nerer any cycles," this volume, ch. 16. Shows that if f and g in system (18) are linear, then cycles are present only in very special cases.

[9] ——, "Biological cycles and the fivefold way," this volume, ch. 18. Discusses in some detail the lynx-hare cycle, the Poincare-Bendixson theory of limit sets (no proofs), and a version of Kolmogorov's theorem for predator-prey interactions.

[10] W. A. Coppel, "A survey of quadratic systems," *J. Diff. Eq.*, vol. 2, pp. 293—304, 1966. Should be read by anyone pursuing Hilbert's problem in the quadratic case. Readable by anyone with advanced calculus and a good course in differential equations.

[11] M. H. Dulac, "Sur les cycle limites," *Bull. Soc. Math. de Frace*, vol. 51, pp. 45—188, 1923. Proves that the number of limit cycles of a polynomial system is finite.

[12a] David Hilbert, "Mathematical problems," presented at the 2nd Internat. Congr. of Mathematicians, Paris, 1900. English translation in *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 8, pp. 437—479, 1901—1902. This is readable by a senior math major with a good background.

[12b] P. S. Aledkandrov, Ed. *Problemy Gil'berta*, Izdat. Nauka, Moscow, 1969. German transl. *Die Hilbertische Probleme*, Akad. Verlag., Leipzig, 1971. Contains Russian and German versions of Hilbert's problems and a description of their current status. Nothing is said about the results concerning the second half of Problem 16.

[12c] F. E. Browder, Ed., *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, in *Proc. Symposia in Pure Math.*, Amer. Math. Soc., 1976. Goes considerably beyond Aleksandrov's book, lists other problems of current interest, but devotes only a few sentences to the second half of Hilbert's 16th problem.

[13] M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems, and Linear Algebra*. New York: Academic, 1974. A very good treatment from a modern point of view-junior, senior level. Contains a good treatment of population models.

[14] Ju. S. Il'jasenko, "The origin of limit cycles under perturbation of the equation $dw/dx = -R_z/R_w$, where $R(z, w)$ is a polynomial," *Mat. Sbornik*, vol. 78, (120), pp. 360—373, 1969. An English translation appears in *Math. USSR Sbornik*, vol. 7, pp. 363—364, 1969. An advanced tratment of complex polynomial systems, but with applications to the real case, and the problem of estimating the number of disjoint eyes.

[15] L. B. Keith, *Wildlife's Ten-Year Cycle*. Madison: Univ. of Wisconsin, 1963. A thought-provoking account on a nonmathematical level of the various natural cycles in the vast Canadian forests. Should be read by anyone interested in natural cycles.

[16] D. L. Lack, *The Natural Regulation of Animal Numbers*. Oxford, Clarendon, 1954. Still a good source.

[17] R. M. May, *Stability and Complexity in Model Ecosyutems*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1973. A fascinating and readable account. Excellent bibliography.

[18] ——, "Limit cycles in predator-prey communities," *Science*, vol. 177, pp. 900—902, 1972. A discussion of Kolmogorov's theorem. A good bibliography.

[19] J. Maynard Smith, *Models in Ecology*. Cambridge, 1974. An excellent source of differential equations models. Good bibliography.

[20] N. F. Otrokov, "On the number of limit cycles of a differential equation in the neighborhood of a critical point," *Mat. Sbornik*, vol. 34(76), pp. 127—144, 1954. A detailed construction of a polynomial system with a multitude of isolated cycles forming a single eye.

[21] I. G. Petrovskii and E. M. Landis, "On the number of limit cycles of the equation $dy/dx = P(x, y)/Q(x, y)$, where P and Q are polynomials of the second degree," in Russian, *Mat. Sb.*, vol. 37(79), pp. 209—250, 1955. English transl. in *Amer. Math. Soc. Transl.*, ser. 2, vol. 10, pp. 177—221, 1958. This paper and the following two require a background in topology and complex analysis.

[22] E. M. Landis and I. G. Petrovskii, "On the number of linit cycles of the equation $dy/dx = p(x, y)Q(x, y)$, where P and Q are polynomials," in Russian, *Mat. Sb.*, vol. 43 (85), pp. 149—168, 1957. English transl., *Amer. Math. Soc. Transl.* ser. 2, vol. 14, pp. 181—199, 1960.

[23] I. G. Petrovskii and E. M. Landis, "Corrections" (to the above two papers). *Mat. Sb.*, vol. 48 (90), pp. 253—255, 1959.

[24] E. M. Landis and I. G. Petrovskii, "Letter to the Editor," *Mat. Sb.*, vol. 73 (115), p. 160, 1967. English transl., *Math of the USSR*, vol. 2, p. 144, 1967.

[25] Song-ling Shi, "A concrete example of the existence of four limit cycles for plane quadratic systems," *Scientific Sinica*, vol. 11, pp. 1051 — 1056, 1979 (Chinese edition) and vol. 23, pp. 154-158, 1980 (English edition). Just what the title says!

[26] ——, "Examples of five cycles for the system (E_3) …," *Acta Math Sinica*, vol. 4(18), pp. 300—304, 1975. By means of examples shows that $H(3)\geqslant 5$.

[27] K. S. Sibirskii, "On the number of limit cycles in the neighbourhood or a singular point," *Diff. Urav.* vol. 1, pp. 53 — 66, 1965. In English translation in *Diff Eq.* vol. 1, pp. 36-47, 1965. Shows that a cubic system may have five isolated cycles enclosing a single critical point.

[28] Chin-Chu Tung, "Positions of limit cycles of the system…," *Scientia Sinica.* vol. 8, pp. 151—171, 1959. Reprinted in *Chinese Math.*, vol. 8, pp. 854—874, 1966. An excellent introduction to the properties of isolated cycles of quadratic systems together with several specific examples worked out in detail.

[29] H. R. van der Vaart, "Conditions for periodic solutions of Volterra differential systems," *Bull of Math. Bio.*, vol. 40, pp. 133 — 160, 1978. An exhaustive analysis of system (18), where f and g are affine functions of x and y.

[30] E. O. Wilson and W. H. Bossert, *A Primer of Population Biology*, Stamford, CT: Sinauer Assoc., 1971. A good, not very technical account of the subject.

[31] Yenchien Yeh, "Periodic solutions and limit cycles of certain nonlinear differential systens," *Sci. Record* (N. S.), vol. 1, pp. 391 — 394, 1957. Statements of properties of isolated cycles of quadratic systems.

[32] ——, "A qualitative study of the integral curves of the differential equation…, II: Uniqueness of limit cycles," *Acta Math. Sinica*, vol. 12, pp. 60 — 67, 1962. In English translation in *Chinese Math*, vol. 3, pp. 62—70, 1963. An interesting treatment of the behaviour of isolated cycles of system(1).

[33] (added in proof) C. Chicone and Tian Jinghuang, "On general properties of quadratic systems," *Amer. Math. Monthly*, vol. 89, pp. 167 — 178, 1982. Brings [10] and [28] up to date; mentions [25], lists a number of

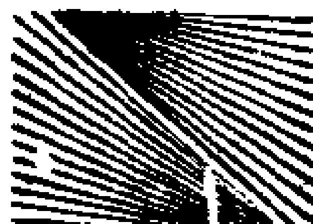
open problems.

教 师 参 考

目的 基本目的是把数学分析中有意义的未解决的问题介绍给学生，以及使这样的问题与某些生态学的问题联系起来。这问题必定与平面自控微分系统的循环（周期解）的数目有关。

预备知识 初等微分方程，极坐标，一些画微分方程的轨迹的经验。而第4节，要一些以前熟悉的捕食者-被捕食者模型。

时间 2次课。



第 VI 部分

导致偏微分方程的模型

第 20 章

调压塔分析

Donald A. Drew *

1. 调 压 塔

水力发电需要从一个很高的存储区(即水库)到发电厂之间实施高压水的有效传送,距离常达几百米。显而易见的办法是两头连接一个大输送管,但这有严重的缺陷。当对用户的电力供应有一个大的冲击时,需要急剧地增加流进水轮机的水流量,而当电力需要下降时,又致使水流突然地变慢起来。在这两种情况下,输送管内水的大部分都会突然地改变速度。水的微小的可压缩性,以及输送管本身微小的弹性,导致一个高压波沿着输送管向上、下传播,终于造成"水击作用"而常常使输送管破裂。

为了克服这个困难,在紧挨水轮机前头的输送管上接一个大水箱。这个称为调压塔的大水箱,当水轮机需要较少水的时候,应该灌满水,而当水轮机需要较大量的水时,应该迅速地提供更多的水(见图 20.1)。我们将研究输送管-调压塔系统的作用。

---

* Department of Mathematical Sciences, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, NY 12181.

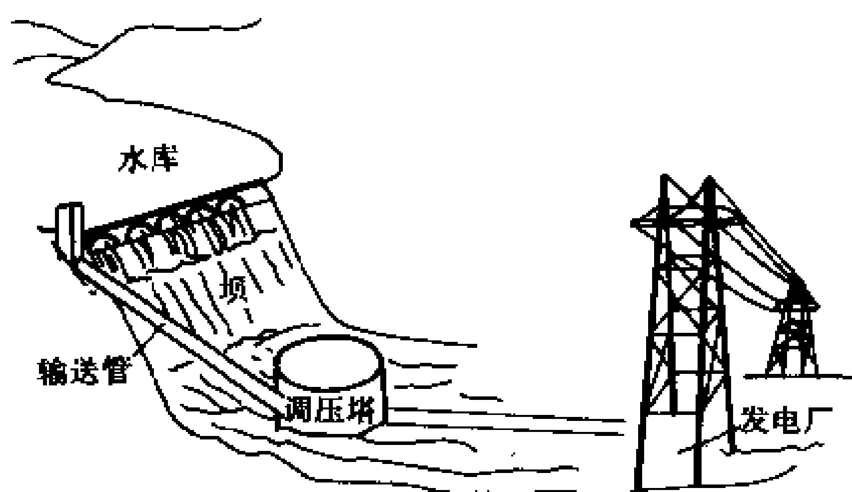


图 20.1 水库-输送管-调压塔-发电厂系统

2. 流量方程

我们打算把这个研究分为两节。先考虑输送管中不可压缩流体的流量。然后考虑把调压塔看成一个大的输送管连接到相应的输送管时的流量。如果对控制输送管中可压缩流体流量的更完全的方程组感兴趣，可以读读附录。

考虑长度为 L 横截面积为 A 的一截输送管。假设流体的密度为 ρ，则流体的质量为 ρAL. 如果 $v(t)$ 为输送管中的流体（纵向的）速度，则在输送管中的流体的线性动量的变化率为

$$\rho AL\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}. \tag{1}$$

根据牛顿定律，这个动量的变化率等于外力的和。

人们发现，在输送管中的流体受三种类型的外力：1）压力，2）引力和 3）粘滞力（阻力）。我们先考虑压力。设 p_i 为入口处的压强，而 p_o 为出口处的压强，则总压力（朝向出口端）是 $(p_i-p_o)A$. 再考

虑引力。设管子与水平方向成 θ 角(图 20.2)，则引力沿运动方向的分力为 $\rho ALg\sin\theta$，其中 g 是重力加速度。

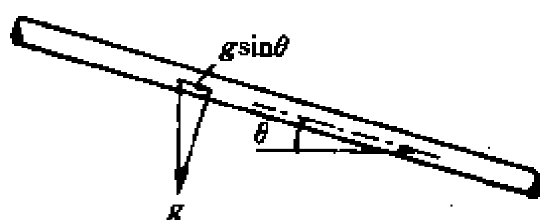


图 20.2

最后，考虑阻力。流体在管中流动受到一个阻止流动的力，它随流量的增大而增加。实验数据表明，阻力与速度 v 的平方成正比。于是粘滞力为 $-cLv^2$，其中 c 为实验常数。

于是，流体在管中的运动方程为

$$\rho AL\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=A(p_i-p_o)+\rho ALg\sin\theta-cLv^2. \tag{2}$$

现在考虑调压塔的动态特性。本质上，调压塔可以看作一个大的管子。在大的管子中，流速小。于是动量方程成为

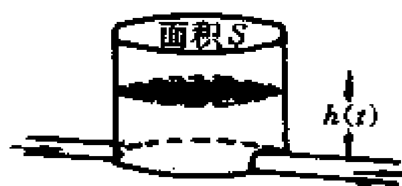


图 20.3 调压塔的几何形状

$$(p_a-p_o)S=-\rho Shg, \tag{3}$$

其中 p_a 为大气压力，S 为调压塔的横断面面积，而 $h(t)$ 是高于调压塔进水口的水平面高度。注意，我们已经把调压塔底部的压强取

成出口处的压强了。

我们将假定调压塔出水口的速度(它也等于发电厂进水口的速度)是由 $v_T(t)$ 给出的 t 的指定函数。且出口管子的横截面积为 A(见练习 1)。既然在调压塔内流体质量的变化率等于流入的流量减去流出的流量，于是，我们知道

$$\mathrm{d}(\rho Sh)/\mathrm{d}t = \rho A[v(t) - v_T(t)]. \tag{4}$$

等式(4)通常称为质量平衡方程。

3. 稳定状态的稳定性

如果我们由(3)解出 p_o 作为 h 的函数，并用(4)在(2)中消去速度，那么，得到

$$\rho SL\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}t^2} = A(p_i - p_a) - \rho gAh + \rho ALg\sin\theta - cL\left(\frac{S}{A}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} + v_T\right)^2 + \rho AL\frac{\mathrm{d}v_T}{\mathrm{d}t} \tag{5}$$

(见练习 2)。

如果令 $\mathrm{d}h/\mathrm{d}t = \mathrm{d}^2h/\mathrm{d}t^2 = 0$，以及 $\mathrm{d}v_T/\mathrm{d}t = 0$，那么，就得到由

$$h_s = L\sin\theta - \frac{(p_i - p_a)}{\rho g} - \frac{cLv_0^2}{\rho gA} \tag{6}$$

(其中 $v = v_T = v_0$ 为一个常数)给出的(5)的**稳定状态解**。

现在让我们探讨一下，到时候这个稳定状态可能有怎样的小偏离(扰动)变化。水轮机运转状况的少许变化，例如电力需要增加时，会引起 v_T 的改变。这种改变将导致调压塔中水位的变化。我们想知道调压塔中会发生什么现象。

对由(5)给定的 $h(t)$ 的演变作数学上的分析，已超出了本章的范围。但是，如果着眼于水的高度的小偏离，我们能够完成一个有意义的分析。而且，我们断言，从近似分析(假定小偏离)得到的

数据将是十分有用的，因此值得付出努力。另一方面，如果不作小偏离的假定，我们就不可能得到有意义的解。

设 $h=h_s+\epsilon h_1$ 和 $v_T=v_0+\epsilon v_1$，其中 ϵ 是扰动 h_1 的幅度大小。我们将假定 ϵ 非常小。用 $h=h_s+\epsilon h_1$ 代入(5)，我们有

$$\rho SL\frac{\mathrm{d}^2h_1}{\mathrm{d}t^2}=-\rho gAh_1-\frac{2cL}{A}v_0\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}-\epsilon\frac{cLS^2}{A^2}\frac{\mathrm{d}h_1^2}{\mathrm{d}t}$$

$$+\rho AL\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}-2\epsilon cLv_0v_1-2\epsilon^2cLv_1\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}. \quad (7)$$

略去有因子 ϵ 或 ϵ^2 的项，于是关于 h_1 的近似方程为

$$\frac{\mathrm{d}^2h_1}{\mathrm{d}t^2}+\beta\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}+kh_1=a\frac{\mathrm{d}v_1}{\mathrm{d}t}, \quad (8)$$

其中 $\beta=2cv_0/\rho A, k=Ag/S$，以及 $a=A/S$.

练习 3 要你求解当流入发电厂的流体的速度有一个阶跃(相应于电力需要量的骤然增加)时相应的问题。

(8)的一般齐次解，可以写成

$$h_{1H}=h_0e^{-\beta t/2}\cos(\omega t+\phi_0), \quad (9)$$

其中 h_0 和 ϕ_0 是常数，而频率 ω 为

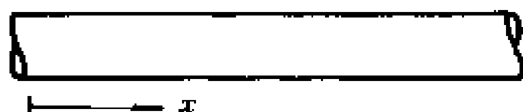
$$\omega=\sqrt{k-\frac{\beta^2}{4}}.$$

物理上，β 通常很小，使得解(9)表示一个按照 $e^{-\beta t/2}$ 衰减的振荡。如果 β 是小的，那么任一个振荡都将持续一段长时间。这是一个调压塔中不希望有的特性。这个问题通过在调压塔中采用升降器(一个细的带有一些孔的垂直管子)已经得到了一个非常满意的解决。从输送管进入的水流进到升降器而不是直接流入调压塔，这种情况的分析多少更复杂一些，有兴趣的读者可参看 Noble 的书[1].

附　　录

考虑在管子中流体的流量。设 x 为沿管子自一个任意指定的

参考点算起的坐标。在这个问题中，像几乎所有含有运动和正面的问题一样，有关平衡的合适的量是质量和动量。



首先考虑质量的平衡。假定 $\rho(x,t)$ 为流体在时刻 t 于 x 处的密度。流体在由 x 到 $x+\Delta x$ 这段的质量为

$$A\int_{x}^{x+\Delta x}\rho(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}, \tag{A1}$$

其中 A 是管子的横截面积。

穿过在 x 处的横截面的质量的通量为 $A\rho(x,t)v(x,t)$，其中 v 是沿 x 方向的流体速度。在任何断面上没有产生或消失质量，于是质量的平衡变成

$$A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{x}^{x+\Delta x}\rho(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}$$
$$= A\rho(x,t)v(x,t) - A\rho(x+\Delta x,t)v(x+\Delta x,t). \tag{A2}$$

用 $A.\Delta x$ 去除，并令 $\Delta x\to 0$，便得

$$\frac{\partial\rho(x,t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}[\rho(x,t)v(x,t)]. \tag{A3}$$

把这个方程写成

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} - v\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x} = 0 \tag{A4}$$

是富有启发性的。量 $\partial\rho/\partial t+v(\partial\rho/\partial x)$ 称为 ρ 的**实质导数**且往往用 $\mathrm{D}\rho/\mathrm{D}t$ 或 $\mathrm{d}\rho/\mathrm{d}t$ 表示。让我们来讨论它的意义。

假定 $\phi(x,t)$ 为两个变量的函数，而 $t=f(\tau)$，$x=g(\tau)$ 为单变量 τ 的函数。那么

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\phi(g(\tau),f(\tau)) = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}.$$

今假定 $f(\tau)=\tau$，于是 τ 和 t 是相同的变量，并假定 $g(\tau)=$

$g(t)$作为t的函数，是流体的一个薄片的位置，因此$\mathrm{d}g/\mathrm{d}t=\mathrm{d}x/\mathrm{d}t$=薄片的速度，以致$\mathrm{d}x/\mathrm{d}t=v$. 那么

$$\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\phi}{\partial t}+v\frac{\partial\phi}{\partial x} \tag{A5}$$

为当$x=x(t)$时ϕ的变化率，其中$x(t)$是流体薄片在时刻t时的位置。于是$\mathrm{d}\phi/\mathrm{d}t$是$\phi$沿着流体的导数，或实质导数。(与$v$依赖于$x$没有什么关系。)

用流体密度的话来说，我们有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=-\rho\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{A6}$$

右边表示流体的压缩。如果$\partial v/\partial x<0$，那么，速度向右面递减，于是我们料想在那附近地方的流体的密度将增加。

现在考虑沿x方向动量的平衡。动量，像我们将要对它定义的那样，只不过是质量乘速度。更确切地说，在x至$x+\Delta x$区间段流体的动量是

$$A\int_x^{x+\Delta x}\rho(\tilde{x},t)v(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{A7}$$

动量平衡的命题是：

线性动量的变化率=动量的净通量+外力。

与牛顿(Newton)第二定律的经典陈述的微小差别在于有通量项。

考虑通量项。流体穿过x处的断面的运动速度为$v(x,t)$，而流体带有的动量为$\rho(x,t)v(x,t)$. 于是，在任一x处的通量为

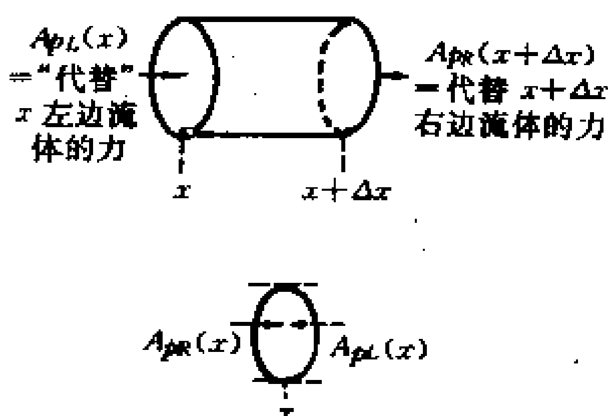
$$A\rho(x,t)v^2(x,t). \tag{A8}$$

我们考虑的外力有三种类型：压力、阻力和重力。先考虑重力。假设重力加速度沿x方向的分量为$g\sin\theta$，其中θ是管子与水平方向所成的角。在x至$x+\Delta x$区间段上的整个重力为

$$A\int_x^{x+\Delta x}\rho(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}g\sin\theta. \tag{A9}$$

其次考虑压力项。为了了解压力这概念，通过切掉在x左边

和 $x+\Delta x$ 右边的流体，我们使 x 和 $x+\Delta x$ 之间这段流体孤立起来。为了使 x 和 $x+\Delta x$ 之间的流体表现出恰如切掉的流体仍在那里，我们必须用力来代替它的作用。假设这些力为 $Ap_L(x)$ 和 $Ap_R(x+\Delta x)$，根据作用-反作用，表明 $Ap_L(x)=Ap_R(x)$，及 $Ap_L(x+\Delta x)=Ap_R(x+\Delta x)$. 于是 $p_L(x)=p_R(x)=p(x)$.



顺便，我们定义了 $p_L(x)$ 和 $p_R(x+\Delta x)$. 在 x 至 $x+\Delta x$ 区间段上的净压力为

$$A(p_L(x)-p_R(x+\Delta x))=A(p(x)-p(x+\Delta x)). \tag{A10}$$

压力的外表，有像通量项那样的形式，就是说，利用某个函数在 x 处的值减去这个函数在 $x+\Delta x$ 处的值。

最后，考虑阻力。根据实验，阻力与流体速度的平方成正比。这个力适当的一般化，就是

$$-\int_x^{x+\Delta x} cv^2(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}. \tag{A11}$$

这样，线性动量的平衡成为

$$\begin{aligned}&A\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_x^{x-\Delta x}\rho(\tilde{x},t)v(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}\\ &=A\rho(x,t)v^2(x,t)-A\rho(x+\Delta x,t)v^2(x+\Delta x,t)\\ &\quad+Ap(x,t)-Ap(x+\Delta x,t)\end{aligned}$$

$$+ A\int_{x}^{x+\Delta x} \rho(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}.\ g\sin\theta - \int_{x}^{x+\Delta x} cv^2(\tilde{x},t)\mathrm{d}\tilde{x}. \qquad (A12)$$

用 $A\Delta x$ 一除，并令 $\Delta x \to 0$，得到

$$\frac{\partial \rho v}{\partial t} + \frac{\partial \rho v^2}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g\sin\theta - \frac{c}{A}v^2. \qquad (A13)$$

算出(A_{13})左边的微分，并利用(A_4)，我们有

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + v\frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial v}{\partial x}\right)v + \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right) = \rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x}\right). \qquad (A14)$$

练　　习

1. 当在调压塔出口处管子的面积为 $B\neq A$ 时，推导对应于(4)的质量平衡方程。
2. 推导(5).
3. 求出(8)对应于 $v_1(t)=H_0(t)$ 的解，其中 H_0 为由

$$H_0(t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{当 } t < 0 \end{cases}$$

定义的海维赛得(Heaviside)函数。关于初始条件，你可以假设当 $t<0$ 时，$h_1 = \mathrm{d}h_1/\mathrm{d}t = 0$. 提示：如果 $v_1(t)=H_0(t)$，则 $\mathrm{d}v_1/\mathrm{d}t=\delta(t)$，其中 δ 为狄拉克(Dirac) δ—函数。这对应于像由

$$\frac{\mathrm{d}^2 h_1}{\mathrm{d}t^2} + \beta\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t} + kh_1 = 0, \qquad t > 0,$$

$$h_1(0+) = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}h_1}{\mathrm{d}t}(0+) = a$$

给出的关于 h_1 的问题。

参　考　文　献

[1]　B. Noble, *Applications of Undergraduate Mathematics in Engineering*. MAA and Macmillan, 1967.

Texts in differential equations which consider the Dirac delta function are:

[2]　W. E. Boyce and R. C. Diprima, *Elementary Differential Equations and Boundo-*

ry Value Problems, 3rd ed. New Yord: Wiley, 1977.

[3] M. Braun, *Differential Equations and Applications*, 2nd ed. New York: Springer—Verlag, 1978.

教 师 参 考

目的 本章考虑输送管-调压塔系统的稳定性。推导出了控制调压塔中水的总量的方程，研究了稳定状态的稳定性。本章可以作为流体动力学的基本原理的入门。本章主要取材于 Noble 的书[1]。

预备知识 基础力学，多元微积分，微分方程。

时间 （如果略去附录）够讲一次课。

第21章

摇动一根弦使其停止

Robert L. Borrelli *

1. 引　　言

周期性的扰动，在科学与工程的许多不同的领域中，扮演着一个重要角色。周期性扰动的一些例子是：重力场中摆的运动、天体的运动和电路中的振荡。当周期性扰动在空间进行时，共同地称为"波动"。波动的一些常见的例子是：池塘水面上涟波的运动、声波和拉紧的柔软的弦上的横向振动。

本章，我们将相当详细地分析在波动中也许是最简单和最直观的系统：拉紧的柔软弦上的横向振动。在建立振动弦运动的线性化模型以后，我们将描述振动弦方程解的特性，从此可以导出波动的许多性质。然而，本章的目的是下述关于振动弦的最佳控制问题的解答：假定一条拉紧的柔软弦的一端被系紧，证明存在一个最小时间 T，不管弦的初始偏移和初始速度如何，都能用一个合适的振动作用于另一端，使得这个弦在时间 T 内静止下来。意想不到的是，直到1971年当 P. C. Parks[1]给出一个简单而精巧的最佳控制问题解之前，这个问题并不曾被研究过。

* Depatment of Mathematics, Harvey Mudd College, Claremont, CA 91711.

2. 振动弦的线性模型

假设一条弦拉紧在 x 轴的点 $x=0$ 和点 $x=L>0$ 之间。我们希望建立没有外力作用而只在其自身张力作用下的弦的运动模型。为了简化问题，我们假设弦是柔软的，也就是说，在弦上的张力只成切线作用于弦上，因而对弯曲不产生阻力。由于弦在张力作用下的平衡位置是区间 $0\leqslant x\leqslant L$，故，我们可以用指定的三个函数 $u_1(x,t)$，$u_2(x,t)$ 和 $u_3(x,t)$ 来描述弦的运动，这些函数给出在弦平衡时位于 x 处的点在时刻 t 的坐标。根据物理学的理由，很清楚，弦的运动不仅依赖于弦的初始偏移和初始速度，而且也依赖于弦在边界点 $x=0$ 和 $x=L$ 受怎样的约束。稍后我们将讨论边界条件。

为了用一个简单的线性偏微分方程来描述弦的运动，我们将再作一些简化的假设。关于振动弦的更一般的模型，见 H. Weinbeger[3]。特别地，我们作如下的假设：

(1)弦的运动在一个固定的平面上发生，而相对于弦来说弦上的点不得不只沿横向运动。这样，弦的运动就可以用单一地定义在区域 $R=\{(x,t):0<x<L,t>0\}$ 上的函数 $u(x,t)$ 来描述了。

(2)运动* $u\in C^2(R)\cap C^1(\bar{R})$，且对于平衡位置只允许"小"的偏移，在这个意义下，同更低次数的项比较起来，u_x 中的二次项可以忽略不计。

(3)弦上的张力 $T(x,t)\in C^1(\bar{R})$，弦密度 ρ 是常数。

(4)没有外部的横向力作用在弦上。特别，弦的重量被忽略了。

现在我们准备推导弦的运动方程。我们计算作用在线段$[x,x']$部分上的力。作用在这部分上的力，仅起因于张力。我们将求出

---

* 我们用 $\bar{R}$ 表示区域 R 的闭包，即 $\bar{R}=\{(x,t):0\leqslant x\leqslant L,t\geqslant 0\}$。

作用于$[x,x']$区间每一个端点上的张力的平行的和横向的分力。参考图 21.1，我们有下述计算结果(图 21.1 中的标记定义了所用的记号)：

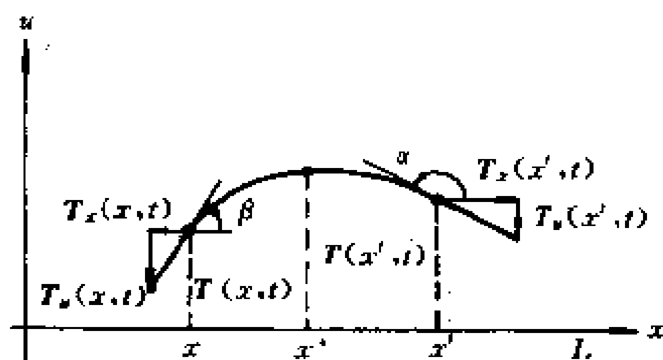


图 21.1　弦于时刻t在$[x,x']$上的轮廓线

$$|T_u(x',t)| = |T(x',t)|\,|\sin\alpha|,$$
$$|T_x(x',t)| = |T(x',t)|\,|\cos\alpha|,$$
$$|T_u(x,t)| = |T(x,t)|\,|\sin\beta|,$$
$$|T_x(x,t)| = |T(x,t)|\,|\cos\beta|.$$

可是，由于有

$$|\sin\alpha| = \frac{|u_x(x',t)|}{\sqrt{1+|u_x(x',t)|^2}},\ |\cos\alpha| = \frac{1}{\sqrt{1+|u_x(x',t)|^2}}$$

以及关于$\sin\beta$,$\cos\beta$的类似公式，我们从假设(2)注意到

$$|\sin\alpha| = |u_x(x',t)|,\qquad |\cos\alpha| = 1,$$
$$|\sin\beta| = |u_x(x,t)|,\qquad |\cos\beta| = 1.$$

这里u_x的二次和更高次的项已经被忽略不计了。于是，往分量上加上适当的取向，我们看到，作用在线段$[x,x']$上的净张力的横向分量和平行分量，分别由

$$|T(x',t)|u_x(x',t) - |T(x,t)|u_x(x,t)$$

和

$$|\boldsymbol{T}(x',t)| - |\boldsymbol{T}(x,t)|$$

给出，但是，由于我们假设只可能有弦的横向运动，于是我们得出结论$|\boldsymbol{T}(x',t)|=|\boldsymbol{T}(x,t)|$。因为$x$和$x'$都是任意的，所以一定有$T=|\boldsymbol{T}|$与$x\in[0,L]$无关。那么，在线段$[x,x']$上应用牛顿第二定律，我们有

$$\rho(x'-x)u_{tt}(x^*,t)=T\{u_x(x',t)-u_x(x,t)\} \tag{1}$$

其中x^*为x和x'之间弦线段的质心坐标。用$\rho(x'-x)$遍除(1)，记T/ρ为c^2，并取当$x'\to x$时的极限，我们得到所有的点$(x,t)\in R$都必须满足的一维波动方程

$$u_{tt}=c^2u_{xx}. \tag{PDE}$$

我们将假定c^2为常数。

3. 在弦端点处的条件

因为此处考虑弦只有横向运动，所以我们必须假定，如果端点允许移动，我们可以通过把弦看作套在端点处仿作的u轴上(但可以按别的方式自由运动)，从而在物理上描述这种情况(自然，可能有别的物理解释)。于是，我们将对三种类型的边界条件感兴趣。

首先，设弦的端点被分别对应于在$x=0$和$x=L$的已知作用$\alpha(t)$和$\beta(t)$所驱动。于是，(PDE)的解$u(x,t)$必须满足边界条件

$$u(0,t)=\alpha(t),u(L,t)=\beta(t),t\geqslant 0.$$

如果$\alpha(t)\equiv\beta(t)\equiv 0$，则弦被牢固地系紧在$x$轴上的$x=0$和$x=L$上。这种特殊情况，通常称为在每个端点上的**固定**边界条件。

第二，设弦的端点$x=0$和$x=L$分别地受到已知的横向力$\gamma(t)$和$\delta(t)$的作用。现在我们来决定，(PDE)的解$u(x,t)$在$x=0$必须满足什么条件。作用于线段$[0,h]$($0<h<L$)上的横向力由

$$Tu_x(h,t)+\gamma(t)$$

给出。

于是，根据牛顿第二定律，必有

$$\rho h u_{tt}(x^*,t) = Tu_x(h,t) + \gamma(t),$$

其中 x^* 是在$[0,h]$上的弦线段的质心。若令 $h\to 0^+$，就得到当 $t\geqslant 0$ 时的条件

$$Tu_x(0,t) + \gamma(t) = 0,$$

因为 $u_{tt}(x,t)$当 $t\geqslant 0$ 时关于 x 是有界的。类似地，可得当 $t\geqslant 0$ 时在另一个端点的条件

$$Tu_x(L,t) - \delta(t) = 0.$$

当 $\gamma(t)\equiv\delta(t)\equiv 0$ 时，这些条件通常称为自由边界条件。

第三，假定弦的左端点用具有弹性常数 k 的弹簧连接到 x 轴上的点 $x=0$ 上，那么，在上面第二种情况中的理由就意味着，(PDE)的解 $u(x,t)$会满足条件

$$Tu_x(0,t) = ku(0,t), t \geqslant 0.$$

同样，将右端点用一个弹簧连接到点 $x=L$ 上，就可以得到一个类似的条件。因此，这样的边界条件通常称为弹性边界条件。

4. 振动弦的混合初一边值问题

正如在第二节中我们已经看到的，振动弦的偏移 $u(x,t)$，只要 $u(x,t)\in C^2(R)$满足某些简化条件，就一定在区域 $R=\{(x,t): 0<x<L,t>0\}$上满足所谓的波动方程(PDE)。在第3节中，我们注意到，如果 $u\in C^1(\bar{R})$，则要求 u 及其关于 x 的一阶偏导数在边界 $x=0$ 和 $x=L$ 对于一切 $t\geqslant 0$ 满足一定条件是恰当的(条件依赖于弦在端点处的约束特性)。自然，弦的初始偏离 $u(x,0)$和初始速度 $u_t(x,0)$也可以被指定。于是，用数学术语来说，具有已知初始条件和端点条件的振动弦的运动将是一个函数 $u\in C^2(R)\cap C^1(\bar{R})$，这样的函数满足所有下列关系(见图 21.2)：

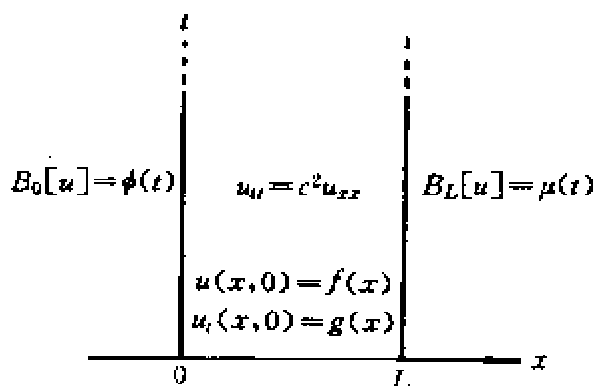


图 21.2 问题(BP)的几何结构

$$\begin{aligned}
&\text{(PDE)} \quad && u_{tt} = c^2 u_{xx}, \text{当 } 0 < x < L, t > 0 \\
&\text{(IC)} \quad && \begin{cases} u(x,0) = f(x), 0 \leqslant x \leqslant L \\ u_t(x,0) = g(x), 0 \leqslant x \leqslant L \end{cases} \\
&\text{(BC)} \quad && \begin{cases} B_0[u] = \phi(t), t \geqslant 0 \\ B_L[u] = \mu(t), t \geqslant 0 \end{cases} \qquad \text{(BP)}
\end{aligned}$$

其中 $f(x)$,$g(x)$,$\phi(t)$,$\mu(t)$ 为已知函数,且边界算子 B_0 和 B_L 可以是(独立地)第 3 节中提及的三种类型中的任一种。注意到,所有这些边界算子都是线性的,具有**初始条件**(IC)和**边界条件**(BC)的**边界问题**(BP),将是在本章剩下部分中我们所关心的对象。我们将看到,**原始数据**[$f(x)$ 和 $g(x)$]和**边界数据**[$\phi(t)$ 和 $\mu(t)$]可以按完全任意的方式选取,只要满足某些适当的光滑性和相容条件。

5. 特 征 线

下面的基本评述对于求出(PDE)的解并最终解决边界问题(BP)将是有用的

定理 1 设 Ω 为 xt 平面中的一开集,$u \in C^2(\Omega)$ 为 Ω 中(PDE)的任一解。那么

(i) $\partial_t t - c\partial_x u$ 在 Ω 中形如 $x-ct=$ 常数的任一线段上为常

数，且

(ii) $\partial_t u + c\partial_x u$ 在 Ω 中形如 $x+ct=$ 常数的任一线段上为常数。

证明 只证断言 (i)，而(ii)的证明非常类似。注意到，(PDE)可以写成

$$(\partial_t + c\partial_x)[\partial_t u - c\partial_x u] = 0,$$

其中外导数与 xt 平面中的一个方向导数成正比，这个方向由具有 x 坐标为 c 和 t 坐标为一个单位的向量所确定。于是，在 Ω 中的直线 $x-ct=$ 常数上，函数 $\partial_t u - c\partial_x u$ 有一个等于零的方向导数，从而得到所要求的结果(见练习 1 关于这个定理通过链法则的一个证明)。

因此，我们看到两个直线族

$$x-ct=\text{常数}, \tag{2}$$

$$x+ct=\text{常数} \tag{3}$$

对于波动方程(PDE)有特殊意义。形如(2)或(3)的每一条线称为波动方程(PDE)的**特征线**。

6. 波动方程的柯西(Cauchy)问题

为了利用特征线的特殊性质导出(BP)的解，我们将先考虑(PDE)的一个纯初值问题。为方便起见，假设初始数据 f 和 g 定义在整个 x 轴上。因此，弦的边界退远到 $+\infty$ 和 $-\infty$，这时，我们不需要边界条件。设 $S=\{(x,t); x\in R, t>0\}$，我们寻找初值问题

$$(\text{CP})\begin{cases} u_{tt} = c^2 u_{xx}, x \in R, t > 0 \\ u(x,0) = f(x), x \in R \\ u_t(x,0) = g(x), x \in R \end{cases}$$

的解 $u \in C^2(S) \cap C^1(\bar{S})$. 问题(CP)称为关于波动方程(PDE)的 Cauchy 问题。尽管事实上人们并不总遇到无限长(或很长)的弦，

我们仍将探索这个物理上理想的情况，它对于获得更实际的问题(BP)的解有利。

首先，我们将证明(CP)不可能有多于一个的解：设 $a<b$ 为 R 中任意两点，并用 $\Delta(a,b)$ 表示以区间 (a,b) 为底、以特征线 $x-ct=a$，$x+ct=b$ 的线段为边的三角形的内部。集合 $\Delta(a,b)$ **称为特征三角形**：见图 21.3. (CP)不可能有多于一个解的事实，是下述定理的结论。

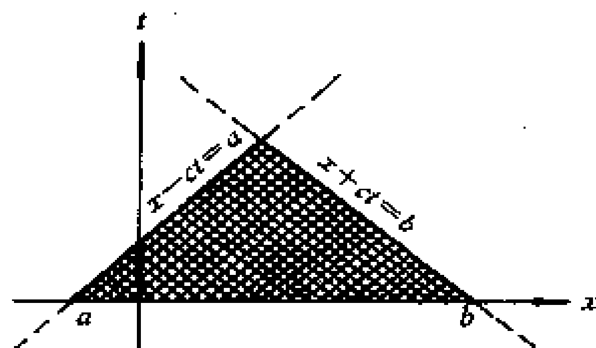


图 21.3 (PDE)的特征三角形 $\Delta(a,b)$

定理 2(唯一性) 设 u、$v\in C^2(\Delta(a,b))$ 为(PDE)：$u_{tt}=c^2u_{xx}$ 的任意两个解，它们在 $\Delta(a,b)$ 的底上都连续可微，并且满足(CP)的初始条件。那么在 $\Delta(a,b)$ 内 $u=v$.

证明 函数 $w\triangleq u-v\in C^2(\Delta(a,b))$ 且满足(PDE)，此外，我们看到

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Delta(a,b)}} w(x,t)=0, \text{对于每一个 } x_0\in(a,b)$$

$$\lim_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Delta(a,b)}} w_t(x,t)=0, \text{对于每一个 } x_0\in(a,b).$$

于是，根据定理 1，我们知道，对于一切 $(x,t)\in\Delta(a,b)$. $w_t+cw_x=0$，$w_t-cw_x=0$*. 因此，在 $\Delta(a,b)$ 中 $w_t\equiv w_x\equiv 0$，从而** 在 $\Delta(a,b)$

---

* 原文此处为 $w_t+w_x=0$，$w_t-w_x=0$. ——校注

** 回顾定理：设 $R\subset R^n$ 为一个区域，并设 $f\in C^1(R)$ 是在 R 中对于每一个指标 $i=1,2,\cdots,n$ 都使得 $\partial f/\partial x_i=0$ 的函数，那么在 R 中 $f\equiv$常数。

中 $w\equiv$常数。显然，这常数一定是零，这样在 $\Delta(a,b)$ 中 $w\equiv 0$。证毕。

我们将证明(CP)有一个根据初始数据实际地构造出来的解。为此目的，假设初始数据 f 和 g 在 x 轴上的区间 (a,b) 上处处有定义，那么，我们有下一个定理。

定理 3(D'Alenbert 公式) 设 $f\in C^2(a,b)$，$g\in C^1(a,b)$ 是开区间 (a,b) 上的已知函数。那么，对于 $(x,t)\in\Delta(a,b)$ 定义的函数

$$u(x,t)=\frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2}+\frac{1}{2C}\int_{x-ct}^{x+ct}g(s)\mathrm{d}s, \qquad (4)$$

是约束柯西问题：

$$(\mathrm{RCP})\begin{cases} u_{tt}=c^2u_{xx} & (x,t)\in\Delta(a,b), \\ \lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Delta(a,b)}} u(x,t)=f(x_0), \text{对于每一个 } x_0\in(a,b), \\ \lim\limits_{\substack{(x,t)\to(x_0,0)\\(x,t)\in\Delta(a,b)}} u_t(x,t)=g(x_0), \text{对于每一个 } x_0\in(a,b) \end{cases}$$

的唯一解。

注 定理 2 和 3 容易推广到初始数据 f 和 g 对一切 $x\in R$ 有定义且满足适当光滑度条件的情况。实际上，基于这种情况，对于 $x\in R$，$t\geqslant 0$，用(4)定义的函数 $u(x,t)$ 是柯西问题(CP)的唯一解。

证明 对于任意的 $(x,t)\in\Delta(a,b)$，用 X_1 和 $X_2(X_1<X_2)$ 表示过 (x,t) 的两条特征线与 x 轴的交点。显然，$a<X_1<X_2<b$，且 $X_1=x-ct$，$X_2=x+ct$. 从定理 1 可知

$$\begin{aligned} u_t(x,t)+cu_x(x,t)&=u_t(X_2,0)+cu_x(X_2,0), \\ u_t(x,t)-cu_x(x,t)&=u_t(X_1,0)-cu_x(X_1,0). \end{aligned} \qquad (5)$$

但由于

$$u_t(X_2,0)=g(X_2), \qquad u_t(X_1,0)=g(X_1)$$

$$u_x(X_2,0)=f'(X_2), \qquad u_x(X_1,0)=f'(X_1)$$

我们看到(5)成为

$$u_t(x,t) + cu_x(x,t) = g(x+ct) + cf'(x+ct)$$

$$u_t(x,t) - cu_x(x,t) = g(x-ct) - cf'(x-ct) \qquad (6)$$

解(6)，我们得到，对于一切$(x,t)\in\Delta(a,b)$

$$2u_t(x,t) = [g(x+ct) + g(x-ct)] + c[f'(x+ct) - f'(x-ct)] \qquad (7)$$

$$2u_t(x,t) = \frac{1}{c}[g(x+ct) - g(x-ct)] + [f'(x+ct) + f'(x-ct)] \qquad (8)$$

设

$$U(x,t) \triangleq u(x,t) - \frac{f(x+ct)+f(x-ct)}{2} - \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(s)\mathrm{d}s, \qquad (9)$$

通过(7)和莱布尼兹(Leibniz)法则*，我们看到，对于$(x,t)\in\Delta(a,b)$，$U_t(x,t)\equiv 0$，因此，我们断言$U(x,t)$只是单变量x的函数。利用(8)，我们看到$U_x(x,t)\equiv 0$，因此$U(x,t)\equiv$常数。最后，取极限，通过(8)，我们看到，对于一切$(x,t)\in\Delta(a,b)$，$U(x,t)\equiv 0$. 证毕。

7. 波动方程解的性质

(CP)有了明确的解，这样，我们就不仅可以研究振动弦问题解的数学性质，而且还可以研究它的意义。

1)**行波的迭加**：首先，注意到(4)中的函数$u(x,t)$可以写成

$$u(x,t) = P(x+ct) + Q(x-ct), \qquad (10)$$

其中

---

* 提醒读者，莱布尼兹法则指出，对于含参数积分的参数求微分，$\alpha(t)$，$\beta(t)$和$g(s,t)$在适当光滑的条件下，有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g(s,t)\mathrm{d}s = g(\beta(t),(t)\beta' - g(\alpha(t),t)\alpha' + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} g_t(s,t)\mathrm{d}s.$$

$$\begin{cases} P(s) = \dfrac{1}{2}f(s) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_0^s g(s')\mathrm{d}s' \\ Q(s) = \dfrac{1}{2}f(s) + \dfrac{1}{2c}\displaystyle\int_s^0 g(s')\mathrm{d}s' \end{cases} \tag{11}$$

这样，(10)告诉我们，为了求得弦在已知时刻 T 的轮廓线(即 $u(x, T)$)，我们只要把由 P 对于 x 轴的图形向左平移 cT 个单位，再加上由 Q 对于 x 轴的图形向右平移 cT 个单位就行了。把 P 和 Q 对于 x 轴的图形看作**波形**，我们看到，$P(x+ct)$ 是由波形 P 以速度 c 随时间向左均匀移动而得的。类似地，$Q(x-ct)$ 正好由波形 Q 以速度 c 随时间向右均匀移动而得。于是，任一个(CP)问题的解是两个**行波**的和，一个向右移动，另一个向左，像(10)那样明显。

注 至此，我们已经分离出波动方程的一类解，它们有(10)的样子且显然包含两个"任意的"函数。有趣的是，波动方程没有别的解；也就是说，波动方程的每一个解都有关于适当的函数 $P(\cdot)$ 和 $Q(\cdot)$ 的(10)的形式。于是(10)是波动方程的**通解**。本节的波动方程是能够方便地求得通解的极少数偏微分方程之一。

2)**惠更斯原理**：假定说，除了有界区间 J 外，弦在开始时处于静止状态，而在区间 J 上，弦有偏移且有某个给定的初速度；也就是说，除了在 J 上，(CP)中的 f 和 g 处处等于零。确定点 x_0"看到"不包含 x_0 的集合 J 上的"扰动"必须经过多长时间是有意义的。很明显，根据(4)，在任一个其底边不和 J 相交的特征三角形 $\triangle(x_0-ct, x_0+ct)$ 中，$u(x,t)$ 等于零。如果 $J=[a,b]$，而 a 是 J 离 x_0 最近的端点，则 x_0 可以"感到"J 上"扰动"的最早时间是 $t=(a-x_0)/c$. 这种观测与1)相符，在1)中，波形 P 和 Q 两者都以速度 c 传播。于是，x_0"觉察到"由 J 上的扰动产生的波的"清晰的开端"，但是通过(4)看到，如果初始速度 g 在 J 上是非平凡的，那么，通常 x_0 将不能"觉察到"由 J 上的"扰动"产生的波的"清晰的末端"，即使 J 的长度选取得**任意小**。这种(CP)问题的独特的性

质，说成是“(CP)不符合惠更斯(Huygens)原理。”

3)**半群性**：设 $u(x,t)$ 为已知初始数据 f 和 g 的柯西问题(CP)的唯一解。设 $T>0$ 已知，再设 $u^*(x,t)$ 为关于初始数据 $f^*(x)=u(x,T)$，$g^*(x)=u_t(x,T)$ 的柯西问题的唯一解。那么，对于一切 $x\in R$ 及一切 $t>0$，我们断言

$$u^*(x,t)\equiv u(x,t+T). \tag{12}$$

换句话说，把 $t=T$ 时弦的状态作为初始数据得到的弦的运动，与用原来的初始数据并且当 t 到达 T 时把我们的时钟拨回 T 个单位所出现的弦的运动是相同的。再说一下(略有差别)，(CP)在带形区域$\{x,t):x\in R,0<t<T_1\}$上的任一解，可以唯一地推广为在带形区域$\{(x,t):x\in R,0<t<T_2\}$上的解 $v(x,t)$，而且，对于 $x\in R,T_1<t<T_2$，$v(x,t)$ 为具有初始数据 $f^*(x)=u(x,T_1)$，$g^*(x)=u_t(x,T_1)$ 而时间在 $t=T_1$ 开始的(CP)问题的解。现在我们着手证明(12)。由(10)

$$f^*(x)\triangleq u(x,T)=P(x+cT)+Q(x-cT)$$

$$g^*(x)\triangleq u_t(x,T)=c[P'(x+cT)-Q'(x-cT)].$$

于是，为了构造 $u^*(x,t)$，我们只要通过(11)算出函数 $P^*(s)$ 和 $Q^*(s)$ 就行了。容易看出，

$$P^*(s)=P(s+cT);$$

$$Q^*(s)=Q(s-cT).$$

因此，再用一次(10)即得

$$u^*(x,t)\triangleq P(x+c(t+T))+Q(x-c(t+T)\equiv u(x,t+T).$$

证毕。

4)**奇异点的传播**：现在我们来考虑其数据仅仅满足逐段光滑的(CP)，就是说，假设除去一个没有有限聚点的集合 Σ 外，对于每一个点 $x\in R$，函数 f 和 g 在 x 的某个开领域 N_x 内满足通常的光滑性要求：$g\in C^1(N_x)$，$f\in C^2(N_x)$。(除去的集合 Σ，在任一个有界的区间上只能有有限多个成员。为什么?)对于满足这些分段光滑

限制的数据，我们仍然能用(4)得到一个函数 $u(x,t)$，它在下述区域中满足波动方程：这个区域为从$\{(x,t):x\in R,t>0\}$中除掉一切形如 $x\pm ct=s_0$ 的特征线所形成的，其中 $s_0\in\Sigma$. 即使像我们将看到的，它们不满足本节开始时采用的光滑性要求，我们仍将称 $u(x,t)$这样的函数为(CP)的解。于是，通过(6)得到的 $u(x,t)$，在 xt 平面上任何一个包含形如 $x\pm ct=s_0$ 的特征线段的区域 R 上，不可能有连续的一阶导数，其中函数 $g(s)+cf'(s)$ 或 $g(s)-cf'(s)$ 在 s_0 处不连续。在这里，有趣的是，初始数据的不连续导致解在任意长的时间后仍不连续；就是说，如果初始数据不具有上面最初定义的光滑性，那么，解 $u(x,t)$ 最终也不可能成为光滑的。类似地，$u(x,t)$在 xt 平面上的任一个包含形如 $x\pm ct=s_0$ 的特征线段的区域 R 上，不可能有连续的二阶导数，其中函数 $g'(s)+cf''(s)$ 或函数 $g'(s)-cf''(s)$在 s_0 处不连续。于是，我们看到(CP)解的不连续性只能沿特征线传播。一条张紧而静止的长度为 L 的弦"被拉出"，而且有初始偏移，当它松开后，其外形如图 21.4 所示。

8.　混合初一边值问题的解

现在我们将指出，怎样用柯西问题(CP)的达郎贝尔解(4)去解其边界值为零(即，$\phi(t)\equiv\mu(t)\equiv0$)的混合初边值问题(BP)，在此，将用一个例子来阐明这一步骤. 考虑一条拉紧的柔软的长为 L 的两端固定的弦，那么弦的运动特点表现为具有边界条件

$$u(0,t)=0,u(L,t)=0,\quad 对于一切\ t>0$$

的(BP)问题。于是，在这种情况下，(BP)取如下形式

$$(\text{PDE})\quad u_{tt}=c^2u_{xx},x\in(0,L),t>0。$$

$$(\text{IC})\quad \begin{cases}u(x,0)=\bar{f}(x),x\in[0,L]\\ u_t(x,0)=\bar{g}(x),x\in[0,L].\end{cases}$$

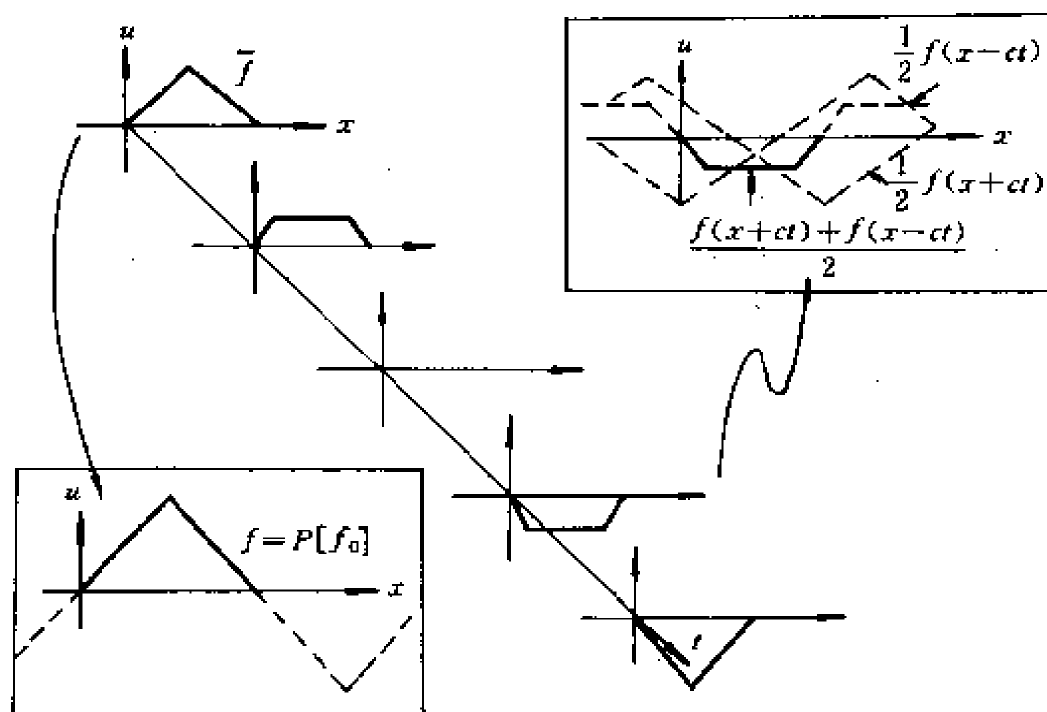


图 21.4 振动弦的外形，行波

$$(\text{BC})\qquad \begin{cases} u(0,t)=0, t\geqslant 0 \\ u(L,t)=0, t\geqslant 0. \end{cases} \qquad (\overline{\text{BP}})$$

值得注意的事实是，我们可以构造一个无限长弦的适当的柯西问题，它的解同样是($\overline{\text{BP}}$)的解。为了证明这点，显然，我们要做的第一件事是，找(CP)中数据 f 和 g 的条件，使得(CP)的解满足尽可能多的($\overline{\text{BP}}$)的解的性质。考虑到这个目的，我们也用 $u(x,t)$ 表示一个适当的柯西问题(CP)的解。这就肯定地需要 $f\in C^2(R)$，$g\in C^1(R)$，而且在$[0,L]$上两者分别地与 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 一致。看一眼(4)就知道，如果 f 和 g 关于点 $x=0$ 和 $x=L$ 是奇函数，那么，对于一切 $t>0$，$u(0,t)=(L,t)=0$. 这样，我们可以按下述方法根据 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 构造 f 和 g. 将函数 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 延拓到$[-L,0]$上，使之成为关于 $x=0$ 的奇函数。接着把这些函数延拓到$[L,3L]$上，使之成为关于 $x=L$ 的奇函数。继续这样的步骤，我们得到两个显然关于 $x=0$ 和 $x=L$

为奇函数的函数 f 和 g。(如果 $\bar{f}_0$ 和 $\bar{g}_0$ 为 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 到 $[-L,0]$ 上成为关于 $x=0$ 的奇函数的延拓，那么，要证明事实上 $f=P[\bar{f}_0]$，$g=P[\bar{g}_0]$，即周期等于 $2L$ 的 $\bar{f}_0$ 和 $\bar{g}_0$ 到 R 上的周期延拓，是不难的。)为了保证 f 和 g 的光滑性质的要求，

$$\begin{aligned}
&\bar{f} \in C^2[0,L],\\
&\bar{g} \in C^1[0,L],\\
&\bar{g}(0) = \bar{g}(L) = 0,\\
&\bar{f}(0) = \bar{f}(L) = \bar{f}''(0^+) = \bar{f}''(L^-) = 0
\end{aligned}$$

是必要的和充分的。这个事实的简单证明留给读者。于是，利用(4)，我们能容易地验证，通过数据 f，g(在上面构造的)所得的(CP)的解 $u(x,t)$，事实上解决了($\overline{\text{BP}}$)问题。

注 类似于($\overline{\text{BP}}$)，但在自由端点(或一个端点固定而另一个自由)条件下的问题，也可以用上述方法来研究。见练习 2. 我们也可以寻找当数据 $\bar{f}$ 和 $\bar{g}$ 逐段光滑时($\overline{\text{BP}}$)的解。上述步骤在该情况下能起非常好的作用，而且不难看到，数据的不连续性沿特征线段 $x\pm ct=s_0$(s_0 为数据的一个不连续点)以及它们关于直线 $x=0$，$x=L$ 的“反射”传播到区域$\{(x,t):0<x<L,t>0\}$上。

可以证明，($\overline{\text{BP}}$)不可能有多于一个解。我们现在就来证明这点。上面关于构造($\overline{\text{BP}}$)的一个解的方法，看来似乎是含有某种任意性。因此，唯一性并不能从我们这里的考虑直接得到。($\overline{\text{BP}}$)的解的唯一性包含在下述定理中。

定理 4(唯一性) *考虑区域 $R=\{(x,t):0<x<L,t>0\}$，设 $u,v\in C^2(R)\cap C^1(\overline{R})$ 为波动方程(PDE)在 R 中的解，而且使得*

$$u(x,0) = v(x,0),\quad u_t(x,0) = v_t(x,0),0 \leqslant x < L$$

及

$$B_0[u] = B_0[v],\quad B_L[u] = B_L[v],t \geqslant 0$$

其中 B_0 和 B_L 为在第 3 节中叙述的任一个边界算子。那么，在 R 中 $u\equiv v$.

证明 说得具体些，我们取 $B_0[u]\equiv u(0,t)$ 和 $B_L[u]\equiv u(L,t)$；其他情况可类似地讨论。这证明实质上是迭代的，因此，代替 R，就图 21.5 中的区域的情况证明之后，我们仅给出证明的一般思路。

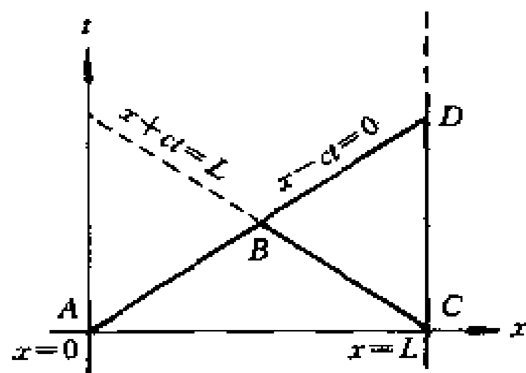


图 21.5 唯一性证明的几何图形

如果令 $w\triangleq u-v$，那么，作为定理 2 的直接推论，我们得到在特征三角形 ΔABC 中，$w\equiv 0$. 今因在直线$\overline{DC}$上 $w=0$，可知$\overline{DC}$上也有 $w_t\equiv 0$. 在形如 $x-ct=$ 常数的特征线上应用定理 1，我们还可知，在$\overline{DC}$上 $w_x\equiv 0$. 因此，把定理 1 应用到贯穿于三角形 ΔBCD 内的那些特征线上，很容易断定：在 ΔBCD 内 $w\equiv 0$. 如果这样的步骤依次用到 R 中每一个由相交特征线形成的三角形中，那么，不难看出，在整个 R 上 $w\equiv 0$.

9. 摇动一根弦使其停止

最后，我们将讨论关于系统的控制论问题，这样的系统，工程师们称之为“带分布参数的系统”。

考虑一条拉紧的长为 L 的弦，端点 $x=0$ 固定，而假设在 $x=L$ 处的端点的位置可以被控制成一个已知的连续可微的时间的函数，那么，弦的运动成为关于某个控制函数$\mu(t)$的$(\mathrm{BP})_\mu$ 问题之解

(在此为方便计，我们令 $c=1,L=1$)

$$(\mathrm{BP})_{\mu}\begin{cases}u_{tt}=u_{xx},0<x<1,t>0\\u(x,0)=f(x),0\leqslant x\leqslant 1\\u_{t}(x,0)=g(x),0\leqslant x\leqslant 1\\u(0,t)=0,t\geqslant 0\\u(1,t)=\mu,t\geqslant 0.\end{cases}$$

我们想要解决下述控制问题：寻找最小值 $T>0$，使得对于任给的初始数据 f、g，存在控制 $\mu(t)$，以致 $(\mathrm{BP})_{\mu}$ 的解 $u(x,t)$ 有

$$u(x,T)\equiv 0,u_{t}(x,T)\equiv 0,0\leqslant x\leqslant 1 \qquad (13)$$

的性质。因为 $(\mathrm{BP})_{\mu}$ 的解满足半群性质(C)，我们看到，如果(13)能够实现，那么，只要当 $t\geqslant T$ 时 $\mu(t)\equiv 0$，弦就将对于一切 $t>T$ 保持静止。于是，我们想要解决的问题是，**怎样摇动一根弦，使之在最短可能时间内停止。**

按上面的说法，控制问题的叙述仍多少有些不精确。实际上，我们没有阐明控制问题的解 $u(x,t)$ 所要求的光滑性质，可被考虑的初始数据的种类也未定义。为明确起见，我们要求控制问题的解 $u\in C^{2}(R)\cap C^{1}(\overline{R})$，其中 $R=\{(x,t):0<x<1,t>0\}$，至于什么是初始数据 f 和 g 必须满足的光滑和相容条件以后再定。因为 $u(1,t)\equiv\mu(t)$，故我们已经加给 $u(x,t)$ 的光滑条件意味着 μ 是一个连续可微的函数。

首先，让我们求得当 $T=2$ 时能保证(13)成立的控制函数 $\mu(t)$ 的某些必要条件。由定理 1，我们注意到，沿着形如 $x+t=$ 常数和 $x-t=$ 常数的特征线，函数 $\partial_{t}u+\partial_{x}u$ 和 $\partial_{t}u-\partial_{x}u$ 一定分别是常数。利用这个事实，如图 21.6 所示，我们容易构造 u_{t} 和 u_{x} 在 R 的边界上的值。如果我们用形如 $x-t=$ 常数的特征线连接点 $P(1,t)$ 和 $P'(x,0)$，那么，通过定理 1，μ' 的值可以同 f 和 g 的值相比较。于是，我们得到

$$2\mu'(t) = -f'(1-t) + g(1-t)^*, 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{14}$$

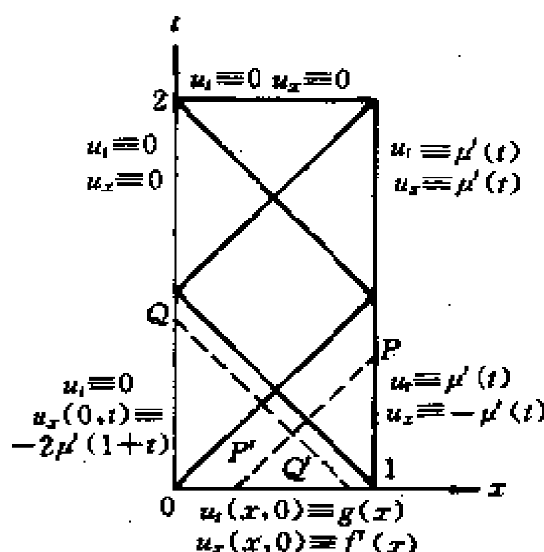


图 21.6 $(\mathrm{BP})_\mu$ 的解的边界值

类似地，如果我们用形如 $x+t=$ 常数的特征线接连点 $Q(0,t)$ 和 $Q'(x,0)$，那么，通过定理 1 得到

$$-2\mu'(1+t) = f'(t) + g(t), 0 \leqslant t \leqslant 1. \tag{15}$$

这样，我们得到条件

$$\mu'(t) = H(t) \equiv \begin{cases} \frac{1}{2}\{g(1-t) - f'(1-t)\}, 0 \leqslant t \leqslant 1 \\ -\frac{1}{2}\{g(t-1) + f'(t-1),\} 1 \leqslant t \leqslant 2. \end{cases} \tag{16}$$

注意到 $\mu(2)=0$，我们看到，ODE（常微分方程）(16)说明 $\mu(t)$ 唯一的是

$$\mu(t) = -\int_t^2 H(s)\mathrm{d}s. \tag{17}$$

按定理 4，对于任一个 $\mu \in C^1[0,2]$，$(\mathrm{BP})_\mu$ 最多只有一个解。

---

* 原文此处误为 $2\mu'(t) = f'(1-t) + g(1-t)$. —— 校注。

当通过(17)决定 μ 而且数据 f 和 g 满足适当的条件时，所希望的 $(BP)_\mu$ 的解存在并且满足最优性准则，这可以用定理 1 来证明*。不过，在证明之前，让我们一开始就假设 $f\in C^2[0,1]$ 和 $g\in C^1[0,1]$。因此，由(17)我们看到，$\mu\in C^1[0,2]$的充分必要条件是 $g(0)=0$，而 $\mu\in C^2[0,2]$的充分必要条件为 $g(0)=0$ 及 $f''(0)=0$. 其次，让我们从(17)注意到 $\mu(0)=0$，因此，如果 $u(x,t)$ 属于 $C'(\overline{R})$类，我们就必须至少有 $f(1)=0$. 类似地，我们必须要求 $f(0)=0$.

于是，通过定理 1 看到，具备当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $u(x,2)=u_t(x,2)=0$ 这种条件的边界问题 $(BP)_\mu$ 的任一解，必须满足关系

$$(\partial_t-\partial_x)u=\begin{cases}g(x-t)-f'(x+t), & 0\leqslant x-t\leqslant 1\\ -\{g(t-x)+f'(t-x)\}, & -1\leqslant x-t\leqslant 0\\ 0, & -2\leqslant x-t\leqslant 0\end{cases}\tag{18}$$

$$(\partial_t+\partial_x)u\begin{cases}g(x+t)+f'(x-t), & 0\leqslant x+t\leqslant 1\\ 0, & 1\leqslant x+t\leqslant 2\\ 0, & 2\leqslant x+t\leqslant 3.\end{cases}\tag{19}$$

微分算子 $\partial_t+\partial_x$ 和 $\partial_t-\partial_x$ 分别地与 $(i+j)/\sqrt{2}$ 和 $(i-j)/\sqrt{2}$ 的方向上的方向导数成正比(其中 i 和 j 分别地为 t 和 x 的正方向上的单位向量)。因此，如果我们能够证明通过(18)，(19)定义的函数 $u(x,t)$ 有连续导数 $(\partial_t-\partial_x)u$，$(\partial_t-\partial_x)^2u$，$(\partial_t+\partial_x)u$ 和 $(\partial_t+\partial_x)^2u$ 的话，那么，u_t，u_x，u_{tt}及 u_{xx}也同样存在和连续

今找到保证由(18)和(19)右边定义的函数属于 $C^2(R)\cap C^1(R)$类的数据 f 和 g 的条件是平凡的。这些条件如下

$$\begin{aligned}&g(0)=0, f(0)=f(1)=f''(0)=0,\\&g(1)+f'(1)=0,\\&g'(1)+f''(1)=0.\end{aligned}\tag{20}$$

---

* 此处所叙述的方法，用于寻找显解不是很实际的。但它服务于我们的目的。

定义容许数据的类 Ω 如下：

$\Omega=\{(f,g):f\in C^2[0,1],g\in C^1[0,1]$，且满足等式(20)$\}$. 如果数据$(f,g)$选成容许的，且假设从(18)和(19)解出了 $u(x,t)$，那么，我们实质上已经证明了：

1. $u\in C^2(R)\cap C^1(\overline{R})$；
2. u 是当 μ 通过(17)定义时$(\mathrm{BP})_\mu$ 的一个解；
3. $u(x,2)=u_t(x,2)\equiv 0,0\leqslant x\leqslant 1$.

另一方面，容易看到，对于一般的容许数据，不存在在少于两个单位时间内可引起弦趋于停止状态的控制函数 μ. 实际上，假定说情况是这样。那么，$(\mathrm{BP})_\mu$ 的解在矩形$\{(x,t):0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant t\leqslant T\}$(见图 21.7)中的特征线 AB 以上恒等于零。于是，对于三角形 BFE 中的任一(x,t)，通过定理 1 我们看到

$$u_t(x,t)+u_x(x,t)=g(x)+f'(x). \tag{21}$$

然而，(21)的左边对于三角形 BEF 中的(x,t)恒等于零，因此，数据 f 和 g 除容许性外还必须满足相容性关系。这样就证实了我们的断言。

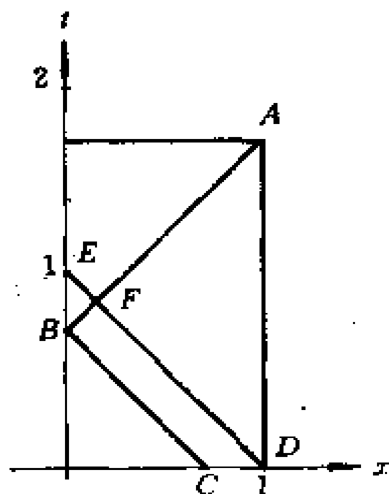


图 21.7 摇动一根弦使其停止：$T<2$

总结我们的结果，有下述定理。

定理 5 存在正数 T，使得对于满足条件(20)的任意的数据 $f\in C^2[0,1]$，$g\in C^1[0,1]$，在 $[0,\infty)$ 上存在一个控制函数 μ 使得振动问题 $(\mathrm{BP})_\mu$ 有一个解 $\mu\in C^2(R)\cap C^1(\overline{R})$ $(R=\{(x,t):0<x<1,t>0\})$，对于一切的 $0\leqslant x\leqslant 1,t\geqslant T$，有 $u(x,t)\equiv 0$. $T=2$ 是这样的 T 的最小值。此时控制函数 μ 是唯一的，并由

$$\mu(t)=\begin{cases}-\int_t^2 H(s)\mathrm{d}s, & 0\leqslant t\leqslant 2\\ 0, & t>2\end{cases}$$

给出，其中

$$H(s)=\begin{cases}\frac{1}{2}\{g(1-s)-f'(1-s)\}, & 0\leqslant s\leqslant 1\\ -\frac{1}{2}\{g(s-1)+f'(s-1)\}, & 1\leqslant s\leqslant 2.\end{cases}$$

注 可以证明，适当选取一个振幅任意小的**周期性**控制函数 $\mu(t)$，弦在有限时间内被振断是有可能的。共振就涉及这种现象。

练　　习

1. 证明用以下方式叙述的定理 1 的断言(i)。设 k 为任一个使得直线 $x-ct=k$ 贯穿 Ω 的常数，那么，对于某个区间 $s_1<s<s_2$，由

$$x=k-cs,t=s,\text{当 } s_1<s<s_2$$

定义的点 (x,t) 描出一条位于 Ω 中的直线 $x+ct=k$* 上的线段。通过链法则证明，对于函数

$$F(s)\triangleq u_t(k-cs,s)+cu_x(k-cs,s)^{**}$$

在 (s_1,s_2) 上有 $F'(s)\equiv 0$.

2. 解问题 $(\overline{\mathrm{BP}})$，其中(BC)用

a)　$u_x(0,t)=0,u_x(L,t)=0,\quad t\geqslant 0$

b)　$u(0,t)=0,u_x(L,t)=0,t\geqslant 0$

代替。

---

* 原文此处误为 $x-ct=k$. ——校注

** 原文此处误为 $F(s)\equiv u_t(k-cs,s)-cu_x(k-cs,s)$. ——校注

提示：对于 a)，由$[0,L]$上的$\bar{f},\bar{g}$构造R上的数据f,g，使得它们关于$x=0$和$x=L$上是偶函数。$\bar{f},\bar{g}$的什么条件保证f和g的适当的光滑性？

对于 b)，由$[0,L]$上的$\bar{f},\bar{g}$构造R上的数据f,g，使得它们关于$x=0$是奇函数，而关于$x=L$是偶函数。$\bar{f},\bar{g}$的什么条件保证f和g在这种情况下的适当的光滑性？

3. 设R为xt平面中的凸域。证明波动方程$u_{tt}=c^2u_{xx}$的任一解$u\in C^2(R)$，对于某些合适的、二次连续可微的函数$F(\cdot)$和$G(\cdot)$，有形式

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct).$$

提示：在xt平面上引入新坐标r和s，它们的地平线是两族特征曲线(2)和(3)。证明在新坐标下，波动方程呈现$u_{rs}=0$的形式。顺便，这论点也表明了波动方程在xt平面的凸域R中的任一解，可以延拓成由特征线段形成的最小平行四边形中的解。为什么？另外，这种延拓是唯一的。为什么？

4. 修改在第 9 节中介绍的关于摇动弦到停止的步骤，以便当弦的长度为L及波动方程中的常数c未必是一个单位时也可应用。

5. 证明当$T>2$时，总存在一个控制函数$\mu(t)$，使得对于任一个容许数据，$(\mathrm{BP})_\mu$的解对于一切$0\leqslant x\leqslant 1$有性质$u(x,T)=u_t(x,T)=0$。证明具有这种性质的控制函数不是唯一的。

参 考 文 献

[1] P. C. Parks, "On how to shake a piece of string to a standstill," in *Recent Mathematical Developments in Control*, D. J. Bell, Ed. New York: Academic, 1973, pp. 267—287. (*Proceedings of the Univ, of Bath Conference*, Sept. 1972.)

[2] A. N. Tychonov and A. A. Samarski, *Partial Differential Equations of Mathematical Physics*, vol. II. Holden—Day, 1967.

[3] H. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations*. Blaisdell.

教 师 参 考

目的 证明在适当条件下，一根一端固定的拉紧的柔软的弦，不管它的初始偏移和初始速度如何，只靠一个适当的摇动作用施加到弦的另一端上，就可导致停止。此外，证明了存在一个最小时

间，在这个时间内，弦可由摇动导致停止，而且把实际能促使弦在这个最小时间内停止下来的最佳摇动策略明确地构造出来了。

内容上完全是自给自足的，如果放到高等微积分或应用分析课程中去将很合适。相当详细地介绍了振动弦的线性化模型和解波动方程的个别技巧。分析了波动方程解的性质以及导出了几何表征，这些在振动弦的摇动问题中都是有用的。

预备知识 对多元微积分和牛顿定律在连续介质中的应用有所熟悉。

第 22 章

冻土中的热传导

Gunter H. Meyer *

1. 问题的描述

在北冰洋和阿拉斯加（Alaska）的布鲁克斯岭（Brooks Range）之间横卧着北斯洛普（North Slope）。在这块寒冷、荒芜的冻原上，已经发现了石油，而且预期在未来的年代里要进行大量的石油勘探和开采活动。这种活动的很大部分需要工程机构（比如，打井机、输油管、工棚，自然，还要有道路和机场）的安装。

在北斯洛普施工，像在北极与南极地带一样，由于场地处于永冻状态而复杂难办。除了几呎（ft）的活性表面层，土壤中的水分永久地保持着冰冻深度可达 600 多呎厚。一年中的大部分时间，顶层都是冻着的，但是在夏日里，土壤中融化的冰平均起来有 2～3ft 深。容易想象，如果位于地下的冰融化了，那么置于冻土上的人造设备将会陷进土壤中去。如果设备还发热，比如输送热油的

---

* Department of Mathematics, Georgia Institute of Technology, Atlanta, GA 30332.

地下管道，那么，问题就变得更加严峻。

在国内外几十年的北极施工经验基础上，解决方法已经发展为使建筑物和道路下面的顶层永久冰冻的问题。一种可能的途径是，用某种方式使建筑物和大地隔热，去防止因冰的融化所引起的支承强度的降低。这种隔热通常采用如下基本方法，建筑物由沙、石子、木料，可能还有人造材料装配到不同厚度的各个夹层中构成。如果大量的建筑材料容易运到工地，那么设计的选择不会过分地影响施工费用。然而，许多北斯洛普工地离任何建筑原料的产地都很远。此外，不时用飞机运材料到工地可能是需要的，因为用履带式车辆（当时可能代替的主要运输方法）横越冰冻的苔原，会撕碎大地的保护层。这种植被提供了一种天然的绝热材料和地面的稳定化；如果它受到扰乱，土壤就会融化，水的径流会冲出沟渠，这进一步妨害了植被。一个不可逆的周期将会开始，这会使地面留下永久的伤痕。

实际上，如果建筑材料不得不运输太长的距离，那么施工费用将主要依赖于建筑物构件的重量。为了寻找最经济的结构设计，需要一套方法以判断给出的设计能否符合对它的要求。因为建筑物在永久冰冻地带，主要的要求是防止松散的富含水分的土壤解冻，以免建筑物陷进软土中去。因此，判断方法的主要组成部分是测定地面温度状况。

本章将描述模拟层状介质中的热流的数学模型公式及其应用，这已经被筛选检定关于北斯洛普的道路和飞机跑道建筑的各种可供选择的设计的公司所采用。我们将相当详细地导出不完全冻结的介质中温度场的方程，提供一个解它的近似（最终是数值的）方法，并讨论由这模型得到的某些典型的结果和结论。这些观点是将模型用于承压工程问题的整个部分。最后，为了满足数学家的好奇心，我们将简略地讨论近似解对于热流方程真实解的收敛性。

本章写成以来，石油勘探和开采在北斯洛普已经成为家常便饭了。宽广的油田已经建成，现在，巨大的输油管把热原油从北斯洛普运到阿拉斯加海湾。比这里所叙述的明显要复杂得多的工程问题，已经出现并被解决了。但是，一个与在北极建筑有关的基本问题保持不变：怎样才能使人造建筑物下面及周围的冻结土地保持终年冻结？于是尽管我们的模型与正在使用的热设施（例如采油井或热输油管）比起来，较为简单，但是这里基本的物理论述仍是有效的。

注解 一些有关北极的背景材料和遇到的石油工业方面的问题可以在［1］～［3］中找到。对于永冻技术方面有兴趣的读者可参考 *Proceedings, Permafrost International Conference*［4］。更先进的设计问题和热模型可在［11］中找到。

2. 模 型

需要一个数学模型来描述建筑在永冻状态的分层土地之上的结构（例如道路、飞机跑道和建筑的地基）的内部及其下面的热流。比如，让我们把兴趣集中于机场建筑。天然的地面可能由若干层冰冻的沙和淤泥构成，而人造的沙子层、石子层，也许还有像泡沫聚苯乙烯那样的绝缘材料层，以及混凝土层或沥青层，按预定的荷载分布，铺到了地面上，以防冰冻的地面融化。可以预料，在夏天的时候，融化的水分将进入人造的顶层，接着参与季节性冰冻过程，像将要证明的那样，这会大大地影响顶层的绝热性质。

建立一个在建筑物之下热流的完全三维模型是可能的。但是，最后得到的方程将十分复杂和难解。另一方面，多年的经验使工程师们认识到，建筑物边缘只在 4～5ft 的范围内受到边缘热效应的作用。因为建筑物在每个方向上可以延伸 30ft 或更多，所以，在

建筑物主要部分下面的温度场只与深度有关。由于这个原因，决定忽略边缘效应，而把温度场的模型作成只是时间和深度的函数。在这种背景下，建筑物的地基结果变成为“无限多”层的厚块。

必须强调，这种近似法以过去的经验为基础；假如从这样的简化模型出发最后得到的结果和经验上的不一致，这模型就该改进了。保持对这种限制的认识，把模型建立起来，在任何这类研究中，都是重要的。

人们区别出三种不同的热传递模式：辐射、对流和传导。根据沙子粒面和砾石各别的品级，三种模式确实都呈现在渗水的泥土中。不过，实验已经证明，所有在这样一种介质中的热的传递，都可用单纯热传导的模型作充分的描述。现在，我们将介绍这种模型。

让我们从考虑没有水分的同类土质的单层开始，比如说，沙子层。层的顶部认为暴露于大气，而底部呢，权且认为保持在一个固定温度上。为了确定顶部和底部之间的温度分布，可以用公式表示一个预测这单层热流的数学模型。正如在前面指出的，我们将假设在这层中的热流是由于传导所致，这意味着下述三个经验法则（或试验事实）控制着这层中的热流 [5]：

(1) 热流朝着温度降低的方向；

(2) 在温度变化过程中，物体得到的或失去的热量与物体的质量和温度的变化成正比；

(3) 通过一个面的热流率与这个面的面积和垂直于这个面的温度梯度成正比。

假设 u 为控制体积的平均温度，Q 为它的含热量，ρ 为它的密度，那么，参照图 22.1，第二个法则可以表示为

$$\Delta Q = c\Delta u\rho\Delta xA \tag{1}$$

比例常数 c 叫做物质的比热；自然，$\rho\Delta xA$ 为控制体积的质量。第三个法则称为热传导的傅立叶（Fourier）法则。如果我们假定在

层中所考虑的点的邻近的热流为严格地垂直的，那么，对于在指定时刻 t 经过时间间隔 Δt，通过面积 A 深度为 x 的沿 x 增加方向的热损失 ΔQ 可以写成

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=-kA\frac{\partial u}{\partial x}(x,t), \tag{2}$$

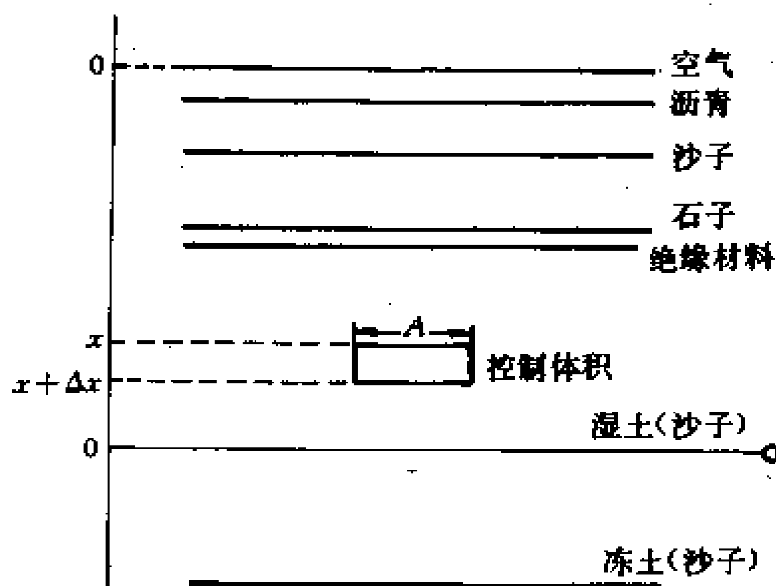


图 22.1　在局部冻土上，四层结构的典型分布

其中比例常数 k 称为物质的传导率。现在考虑图 22.1 中控制体积的能量平衡。流经 $x+\Delta x$ 处那个面的热的总量减去流经在 x 处那个面的热的总量一定等于在时间间隔 Δt 内热损失的总量，即

$$-kA\frac{\partial u}{\partial x}(x+\Delta x,t)+kA\frac{\partial u}{\partial x}(x,t)=-c\rho A\Delta x\frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

假定（像对于现有的系统一样是合理的）温度随时间和空间光滑地变化，我们就可以取当 Δx、$\Delta t\to 0$ 时的极限，从而得到在空间和时间中任一点 $(x,\ t)$ 处温度 u 的傅立叶热传导方程

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)=c\rho\frac{\partial u}{\partial t}(x,t). \tag{3}$$

在 $x=X$ 处，温度保持某个固定值 u_X，即

$$u(X,t)=u_X. \tag{4}$$

在 $x=0$ 处的特征边界条件，不那么容易公式化，因为土地和周围空气可以有十分不同的温度。关于这一点，在后面我们还会进一步讨论。这里，我们将简单地假设土地顶层的温度是时间的一个确定函数，比如说

$$u(0,t)=\alpha(t).$$

最后，我们还需要一个关于土地在我们观察的开始时刻 t_0 的初始温度分布。为了方便起见，我们将选择 $t_0=0$ 并写成

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{6}$$

u_0 的实际形式可能因问题而异。

等式（3）～（6）定义了一个适定的初始边界值问题。已经知道，它的关于合理（比如说，连续的）数据的解存在，而且经验已经证明，它能非常好地预言在均匀媒质中的温度场服从一维热流规律。自然，为了把这模型用于工程计算，人们必须知道关于这一层的函数 $\alpha(t)$，$u_0(x)$ 以及物理常数 k，c 和 ρ. 这样的资料，要么已经，要么很快就能从地质的、气候的和土壤的研究中得到。

至此，我们已经假设所讨论的层是均匀的和无水分的。现在，让我们进一步，假设这层仍然是均匀的，但含有呈现水冰混杂状态的水分。为确定起见，让我们选取图 22.1 中的沙子层，但假定在已知时刻 t_0，沙子在直线 00 以上是潮湿的，而在这直线以下是冻结的（自然，这要求 $\alpha(t_0)>32$℉，$u_X<32$℉）。此刻把沙子看做两层是方便的。对于上一层，方程（3）和边界条件（5）都是成立的，其中 k，c 和 ρ 的值是就潮湿沙子来测定的。冻结线以下的那一层，当 k，c 和 ρ 的值就冻结沙子的情况来选取时，方程（3）也成立。自然，边界条件（4）继续有效。为了计算将来时刻的温度分布，我们必须耦合所谓的自由界面 00（见图 22.1）处潮湿的和冻结的沙子间的温度和热通量。温度的情况是简单的。潮湿沙子层的底部和冻结沙子层的顶部两者都必定正好具有水的冻

结温度（取做32℉），以致

$$u_{SW}(s(t),t)=u_{SI}(s(t),t)=32, \tag{7}$$

其中SW和SI表示沙子的潮湿层和冰冻层，而$s(t)$表示在时刻t时自由界面的位置。自然，自由界面随着时间的推移会移动的。假定在时间间隔Δt内，界面向下运动了距离Δs，那么，融化一块冻结沙子$\Delta s\cdot A$用去的热量为

$$Q=\rho_{SI}\lambda\Delta s\cdot A,$$

其中ρ_{SI}为冻结沙子的密度，而λ为冻结沙子融化的潜热。融化所需的热量，又由从潮湿沙子流出的热通量减去传导进冰冻沙子的热损失提供。因此

$$Ak_{SI}\frac{\partial u_{SI}}{\partial x}-Ak_{SW}\frac{\partial u_{SW}}{\partial x}=\rho_{SI}\lambda\frac{\Delta s}{\Delta t}A.$$

令$\Delta t\to 0$，我们找到了第二个自由界面条件为

$$k_{SI}\frac{\partial u_{SI}}{\partial x}-k_{SW}\frac{\partial u_{SW}}{\partial x}=\rho_{SI}\lambda S'(t). \tag{8}$$

为了找到部分冻结的均匀土质中的温度分布，我们需要同时求出$s(t)$上面和下面能成立的两个热方程服从已知边界和界面条件的解$\{u_{SW},u_{SI},s(t)\}$.

对我们模型的讨论尚不完全。我们心目中的结构由均匀的但不相同的若干层组成，这些层可以依次建立在层状土壤上。对于每一个均匀层，上面的推导都适用。在两层之间的边界，我们将假定为理想的温度连接，以致在这里温度和热通量都是连续的。例如，如果在深度$x=x_k$处，一个界面出现在沙子层和在下面的石子层之间，那么，

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u(x_k+\varepsilon,t)-u(x_k-\varepsilon,t)]=0,$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[k_g\frac{\partial u}{\partial x}(x_k+\varepsilon,t)-k_s\frac{\partial u}{\partial x}(x_k-\varepsilon,t)\right]=0,$$

其中记号s和g表示沙子和石子。注意，传导率k_g和k_s的真值与

沙子和石子在位置 x_k 处是否潮湿或冻结有关。

让我们总结一下在层状介质中热传导的数学模型的方程。我们将假定总共 M 个固定的不相同的层，在那里存在从深度 x_{i-1} 一直到 x_i 的第 i 层。热量参数如下所述：

k_i^f （k_i^w） 冻结（潮湿）时第 i 层的热导率；

ρ_i 第 i 层的密度（假定对潮湿和冻结的土质相同——不是一个重要的限制）；

c_i^f （c_i^w） 冻结（潮湿）时第 i 层的热容量；

λ_i 第 i 层的熔解潜热。

目的是求出函数

u （x，t） 在 x 处 t 时刻的温度；

s （t） 冻土和潮湿土之间的分界面。

作为附加的已知条件，我们指定

α （t） 顶层（也就是 $x=0$ 处）的表面温度，

u_X 最后一层底部（也就是 $x=x_M$ 处）的不变温度，总是低于冰点。

u_0 开始计算时各层的温度分布。

借助于以上所述的记号，层状介质中的温度分布，可由下述自由边界问题：

$$k_i^\gamma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho_i c_i^\gamma \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \tag{9a}$$

和在表面的边界条件

$$u(0,t) = \alpha(t), \tag{9b}$$

在固定的界面上的热流条件

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u(x_i - \varepsilon, t) - u(x_i + \varepsilon, t)] = 0, \tag{9c}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[k_i^\gamma \frac{\partial u}{\partial x}(x_i - \varepsilon, t) - k_{i+1}^\gamma u(x_i + \varepsilon, t)] = 0, \tag{9d}$$

以及底部边界条件

$$u(X,t)=u_X \tag{9e}$$

所确定，其中如果泥土是潮湿的（$x\in(0,s(t))$），则 $\gamma=w$，如果泥土是冻结的（$x\in(s(t),X)$），则 $\gamma=f$. $s(t)$ 的位置由自由界面条件

$$\lim_{\varepsilon\to 0}u(s(t)+\varepsilon,t)=\lim_{\varepsilon\to 0}u(s(t)-\varepsilon,t)=32 \tag{9f}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[k_j^f\frac{\partial u}{\partial x}(s(t)+\varepsilon,t)-k_j^w\frac{\partial u}{\partial x}(s(t)-\varepsilon,t)\right]=\rho_j\lambda_j\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{9g}$$

确定，其中 j 为含有 $s(t)$ 那层的标号。最后，在开始计算时（比如说 $t=0$）的初始温度假设为

$$u(x,0)=u_0(x). \tag{9h}$$

$u_0(x)=32$ 处的点 s_0 是自由界面的初始位置，因此

$$s(0)=s_0. \tag{9i}$$

我们总假定 s_0 由 $u_0(x)$ 唯一地确定。不过，这倒是真的，当系统随时间演变，$u_0(x)$ 和 s_0 对于解 $\{u(x,t),s(t)\}$ 的影响迅速地缩小。

初看起来，方程（9）显得可怕；然而，在一些规则性方面稍作努力，将变得明白。在建筑物下面选取一个具有坐标（深度）x 的点，这个点将落进某一个特定的材料层中，比如说，第 i 层（可能是石子、土，或诸如此类的其他材料）。这个点在时刻 t 的温度为 $u(x,t)$. 它或者在冰点以上或者在冰点以下。如果 $u(x,t)>32°$，那么，在这点的水分就是水，而热量参数用 $\gamma=w$ 表明。如果 $u(x,t)<32°$，那么，水分呈现为冰，而热量参数用 $\gamma=f$ 表明。潮湿材料和冰冻材料之间的分界线位于深度为 $s(t)$ 的地方，它落进某一层，比如说第 j 层。这条线的运动可以用（9g）式表示，并且一定被连同所有 M 层的温度 $u(x,t)$ 所确定。

今天通常称问题（9a）～（9i）为双相斯忒藩（Stefan）问题，以纪念奥地利的物理学家 J. Stefen（1835－1893），他用这种模型研究了冰一水系统。然而，这种类型的问题在各种各样的应用中

非常频繁地出现，并不只是在具有相变化的热传导中。它们出现在化学反应、生物的扩散、粘弹性的扩散和恒星演化中[6][7]。在下一节的进一步叙述中，特别是解的算法，可以容易地经过变形而为许多问题提供相似的数学结构。

3. 解的一个算法

在工业界中，数学模型的公式化和解法（或是精确的，或是数值的）的选择都具有头等重要性。因为必须遵从物理定律，通常，除了标准的线性化假定外，模型公式化时很少有选择余地，另一方面，如果最后的方程没有一个容易得到的精确解，那么，关于它们的近似解法在数学上就有较大的自由。具有随时间变化的表面温度 $\alpha(t)$ 的整个界面问题（9），很难导致用格林（Green）和诺伊曼（Neumann）函数项表示的紧凑解，它们通常只用于初等计算，因此，人们一般借助于数值解法。下述的计算法，已经证明是有效的。

首先，使用所谓的直线法，它是用一类常微分方程的边界值问题来代替热方程的。例如，假定我们要解时间区间 $[0, T]$ 上的冻结-融化问题。设 $N>0$ 为整数，且定义一个区间 $[0, T]$ 上的分割 $\{0=t_0<t_1<\cdots<t_N=T\}$，其中 $\Delta t=T/N$，$t_n=n\Delta t$. 用后向差商代替在 $t=t_n$ 时的偏导数 u_t 和正面速度 $\dot{s}(t)$，即

$$u_t(x,t_n) \approx \frac{u(x,t_n)-u(x,t_{n-1})}{\Delta t} \triangleq \frac{u_n(x)-u_{n-1}(x)}{\Delta t},$$

$$\dot{s}(t_n) \approx \frac{s(t_n)-s(t_{n-1})}{\Delta t} \triangleq \frac{s_n-s_{n-1}}{\Delta t}.$$

其中 $u_n(x)$ 和 s_n 都是指在时刻 $t=t_n$ 时的解。因此，在每个时刻 t_n，（9）可以用下述的常微分方程的自由界面问题近似。

$$k_i^\gamma (u_n)'' - \frac{\rho_i c_i^\gamma}{\Delta t}[u_n - u_n(x)] = 0, (u_n)'' \triangleq \frac{\mathrm{d}^2 u_n}{\mathrm{d}t^2} \tag{10}$$

$$u_n(0) = \alpha(n\Delta t) \triangleq \alpha_n \tag{11}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[u_n(x_i+\varepsilon) - u_n(x_i-\varepsilon)] = 0$$

$$n = 1,\cdots,N, i = 1,\cdots,M \tag{12}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}[k_i^\nu u_n'(x_i-\varepsilon) - k_{i+1}^\nu u_n'(x_i+\varepsilon)] = 0 \tag{13}$$

$$u_n(X) = u_X \tag{14}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} u_n(s_n+\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} u_n(s_n-\varepsilon) = 32 \tag{15}$$

$$\lambda_j\rho_j \frac{s_n - s_{n-1}}{\Delta t} - \lim_{\varepsilon\to 0}[k_j^f u_n'(s_n+\varepsilon) - k_j^w u_n'(s_n-\varepsilon)] = 0. \tag{16}$$

其中仍有，如果$u_n \geqslant 32$，则$\nu=w$；如果$u_n<32$，则$\nu=f$. 由于$u_0(x)$和s_0都是已知的，因此这些问题对于$n=1$，2，等等，关于温度u_n和界面s_n必定依次被解决。

用常微分方程的术语来说，方程组（10）～（16）描述了一个界面问题，它具有$M-1$个（内部的）固定界面，以及一个冰结融化等温线位置上的自由界面。一般说来，线性方程的固定界面问题还算容易求解，然而，自由界面问题则不，因为由于出现了未知界面，它不再是线性的了。这里提出的解法是以转化为初始值问题为基础的。为使这些概念明确起见，暂时先考虑简单的两点边值问题

$$\begin{aligned} u' &= Au + Bv + F(x), u(0) = a \\ v' &= Cu + Dv + G(x), u(X) = b \end{aligned} \tag{17}$$

其中F和G假设为连续的。

求解（17）的一种可能的方法是假设一个初始条件$v(0)=r$，而且在$[0, X]$内对u和v积分微分方程。因为（17）是一个非齐次线性方程组，所以，这种积分总可以求得。事实上，该解可以写成

$$u(x) = \varphi_1(x)r + \psi_1(x),$$

$$v(x) = \varphi_2(x)r + \psi_2(x).$$

其中 φ_i 和 ψ_i 根据常数变易法确定。如果利用第二个方程消去第一方程中的 r，那么，我们看到，与初始条件 r 无关，函数 u 和 v 通过 Riccati 变换

$$u(x) = U(x)v(x) + w(x) \tag{18}$$

相联系。函数 U 和 w 可以不通过常数变易法而直接计算。由于 $u(0) = a$ 与我们对于 v 的取法无关，因此 $U(0) = 0, w(0) = a$. 为了满足 $u(X) = b$，必须选取

$$b = U(X)v(X) + w(X)$$

即

$$u(X) = \frac{b - w(X)}{U(X)}. \tag{19}$$

关于 U 和 w 的定义方程，可以由常数变易法得到，这在 [8] 中有非常详细的叙述。在这里我们将仅仅验证适当的方程的正确性。

设 U 和 w 为

$$U' = B + AU - DU - CU^2, U(0) = 0 \tag{20a}$$

$$w' = [A - CU(x)]w - U(x)G(x) + F(x), w(0) = 0. \tag{20b}$$

的解。这是两个初值问题，它们至少在初始点 $x=0$ 的邻域内可解。假定 $\{U, w\}$ 在 $[0, X]$ 内存在。设 $\hat{v}$ 由 (19) 给出，即

$$\hat{v} = \frac{b - w(X)}{U(X)},$$

又设 v 为线性方程

$$v' = [CU(x) + D]v + Cw(x) + G(x), v(X) = \hat{v} \tag{21}$$

在 $[0, X]$ 上的解。那么，函数对

$$\{u(X) \equiv U(X)v(x) + w(x), v(x)\} \tag{22}$$

是 (17) 的解。事实上，我们看到

$$u(0) = U(0)v(0) + w(0) = w(0) = a,$$

$$u(X) = U(X)\hat{v} + w(X) = b$$

而且 $v'=Cu+Dv+G\ (x)$；此外

$$u'=U'v+Uv'+w'=[B+AU-DU-CU^2]v$$
$$+U[CU+D]v+UCw+UG+Aw-UCw-UG+F$$
$$=A(Uv+w)+Bv+F=Au+Bv+F(x).$$

方程（20）～（22）通常称为边值问题（17）的不变嵌入方程。其次，假定固定界面在 $x=L$ 处出现。让我们把问题写成

$$\begin{aligned} u_i' &= A_i u_i + B_i v_i + F_i(x), \\ v_i' &= C_i u_u + D_i v_i + G_i(x), \end{aligned} \quad i=1,2 \tag{23}$$

$$\begin{aligned} &u_1(0)=a, u_2(X)=b, u_1(L)=u_2(L), \\ &k_1 v_1(L)=k_2 v_2(L) \end{aligned} \tag{24}$$

其中下标 1 是指$[0,L]$中的解$\{u_1,v_1\}$，而 2 表示$[L,X]$中的解。

我们已经看到，在每一个子区间上，解都可以用（22）表示，其中 U_i 和 w_i 由微分方程（20a）和（20b）给出，而 $\hat{v}_2$ 由（19）给出，所有的函数专属的下标，对于区间 $[0,L]$ 用 1 而对于 $[L,X]$ 用 2. 自然缺少关于 $U_2\ (L)$，$w_2\ (L)$ 和 $v_1\ (L)$ 的初值。由固定界面条件得到

$$U_1(L)v_1(L)+w_1(L)=U_2(L)v_2(L)+w_2(L)$$
$$k_1 v_1(L)=k_2 v_2(L).$$

然而，我们还不知道 $v_1\ (L)$；因此，从这两个方程必须解出 $U_2(L)$ 和 $w_2(L)$，使得上面的关系对于任意的 $v_1\ (L)$ 成立。

注意到，如果我们置

$$U_2(L)=U_1(L)\frac{k_2}{k_1}, w_2(L)=w_1(L), v_1(L)=\frac{k_2}{k_1}v_2(L),^* \tag{25}$$

那么，函数

$$\{u_1(x)\equiv U_1(x)v_1(x)+w_1(x), v_1(x)\}$$

---

* 原文此处多一个“$w_2(L)=w_1(L)$”。—— 校注

和 $$\{u_2(x)\equiv U_2(x)v_2(x)+w_2(x)\}$$
将解决固定界面问题。

最后，我们假设边界 $x=X$ 不是固定而是自由的，即未定的，当然还要指定 v（X）的条件。说得更明确些，让我们假定，希望以

$$u_1(0)=a, u_1(L)=u_2(L), K_1v_1(L)=k_2v_2(L),$$
$$u_2(s)=f(s), v_2(s)=g(s) \tag{26}$$

为条件解（23），其中 s 表示自由边界的（未知）位置，而 f 和 g* 是［L，∞］中的已知函数。像以前概述的那样，在［0，L］和［L，s］中，我们可用表达式

$$u_1(x)=U_1(x)v_1(x)+w_1(x)$$
$$u_2(x)=U_2(x)v_2(x)+w_2(x)$$

其中 U_i 和 w_i，$i=1$，2 为已知函数，而 v_2，自然包括 v_1，只有在 s 已知时才能决定。不过，在 s 处的边界条件要求 s 选择得能使

$$f(s)=U_2(s)g(s)+w_2(s).$$

于是考虑函数 $\varphi(x)\triangleq U_2(x)g(x)+w_2(x)-f(x)$. 因为 U_2 和 w_2 在［L，∞］中假定为已知（或可计算）的，所以我们只要求出 $\varphi(x)=0$ 的根 s. 如果这样一个 s 能够求得，那么，对于 $i=2$，假定 $v(s)=g(s)$，在后面的区间［L，s］上积分（21），并且为了得到整个的解 $\{u_i, v_i\}$，$i=1$，2，用 v_1 满足 $v_1(L)=k_2v_2(L)/k_1$ 这个条件在［0，L］上继续积分。为了易于引用，我们称 U_i 和 w_i 的积分为“前掠”，(forward sweep)，称 v_i 的积分为“后掠”(backward sweep)。因此，通过完成前掠，确定自由边界和求得后掠，自由边界问题就可得解。这种方法现将适合于关于层状土质的斯忒藩问题。

从初始数据 $u(x,0)=u_0(x)$ 和 $s(0)=s_0$ 着手，我们将一次一

---

* 原文此处只有函数 g. ——校注

次推进问题的解。这样，我们假定温度分布 u_{n-1} 和冻结融化等温线 s_{n-1} 在时刻 $t_{n-1}=(n-1)\Delta t$ 是已知的，而去求 u_n 和 s_n. 为了便于标志，我们删去表示时间的下标 n，而引入下标 i 表示第 i 层（在时刻 t_n）的温度。此外，有时明确地指明温度是否在冰点以上或以下将是有用的。我们将这样做：上标 w 用于湿土，上标 f 用于冻土。比如，用这种记号，界面条件（15）（在 $t=t_n$ 时）可以写成

$$u^f(s)=u^w(s)=32.$$

（读者要小心区分 Riccati 变换中出现的函数 $w_i(x)$ 和用来表示潮湿状态的上标 w.）

为了把问题（10）～（16）换成类似于（17）的形式，我们选取等价的一阶方程组

$$u_i'=v_i \tag{27}$$

$$v_i'=\frac{c_i^\gamma \rho_i}{k_i^\gamma \Delta t}[u_i-u_{n-1}(x)]\equiv \eta_i^\gamma[u_i-u_{n-1}(x)] \tag{28}$$

来代替（10），其中 $\eta_i^\gamma=c_i^\gamma\rho_i/k_i^\gamma\Delta t$ 及 $i=1,\cdots,M$.

固定边界和界面条件为

$$\left.\begin{aligned}&u_1(0)=\alpha(n\Delta t)\\&u_i(x_i)=u_{i+1}(x_i)\\&k_i^\gamma v_i(x_i)=k_{i+1}^\gamma v_i(x_{i+1})\\&u_M(X)=u_X.\end{aligned}\right\} i=1,2,\cdots,M-1, \tag{29}$$

此外，我们有自由界面条件

$$u_j^f(s)=u_j^w(s)=32 \tag{32*}$$

$$k_j^f v_j^f(s)-k_j^w v_j^w(s)=\lambda_j\rho_j\frac{s-s_{n-1}}{\Delta t} \tag{33}$$

其中 j 是在 $t=t_n$ 时 s 所属的层数。

上面提出的解法要点正好适合于这样的问题，现在假定

---

* 原文公式编号跳过了(30)和(31)。—— 译注

$\alpha(n\Delta t) > 32$ 以致出现水的状态。那么，我们求得前掠。我们知道，通过 Riccati 变换

$$u_i^w = U_i(x)v_i^w + w_i(x) \tag{34}$$

说明了 u_i^w 和 v_i^w 的关系，其中 U_i 和 w_i 由初值问题

$$U_i' = 1 - \eta_i^w U_i^{2*}, U_1(0) = 0, U_{i+1}(x_i) = \frac{k_{i+1}^w U_i(x_i)}{k_i^w} \tag{35}$$

$$\begin{aligned} w_i' &= -\eta_i^w U_i(x)[w_i - u_{n-1}(x)], \\ w_1(0) &= \alpha(n\Delta t), w_i(x_i) = w_{i+1}(x_i) \end{aligned} \tag{36}$$

相继求得。类似地，关于冰冻状态的解 u_i^f 和 v_i^f，通过 Riccati 变换

$$u_i^f = R_i(x)v_i^f + z_i \tag{37}$$

而相互联系，其中 R_i 和 z_i 由前掠

$$R_i' = 1 - \eta_i^f R_i^2, R_M(X) = 0, R_{i-1}(x_{i-1}) = \frac{k_{i-1}^f R_i(x_{i-1})}{k_i^f} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} z_i' &= -\eta_i^f R_i(x)[z_i - u_{n-1}(x)], \\ z_M(X) &= u_X, z_{i-1}(x_{i-1}) = z_i(x_{i-1}) \end{aligned} \tag{39}$$

确定。(注意到，这前掠把我们从地平线下 X 处的地层一直带到地表层，以便这些方程沿 x_i 减小的方向积分)。现在，剩下的事是去找自由界面。如果在第 j 层的某一点 x 处，两种状态的温度等于 32，那么，相应的梯度 v_i 从 (34) 和 (37) 求得，它们是

$$v_j^w(x) = \frac{32 - w_j(x)}{U_j(x)}, v_j^f = \frac{32 - z_j(x)}{R_j(x)}.$$

如果把这表达式代入界面条件 (33)**，我们发现，s 必定是函数(在第 n 个时间处)

$$\varphi(x) \triangleq k_j^f\left(\frac{32 - z_j(x)}{R_j(x)}\right) - k_j^w\left(\frac{32 - w_j(x)}{U_j(x)}\right) - \lambda_j\rho_j \frac{x - s_{n-1}}{\Delta t} = 0 \tag{40}$$

---

* 原文此处误为"$U_i = 1 - \eta_i^w U_i^2$"。—— 校注

** 原文此处误为 (23)。——校注

的根。一旦找到了这样的根，我们便能通过积分（在 $[0, s]$ 上向后）

$$v_i^{w'} = \eta_i^w U_i(x) v_i + \eta_i^w [w_i(x) - u_{n-1}(x)], v_i^w(s) = \frac{32 - w_i(s)}{U(s)} \tag{41}$$

和积分（在 $[s, x_m]$ 上向前）

$$v_i^{f'} = \eta_i^f R_i(x) v_i^f + \eta_i^f [z_i(x) - u_{n-1}(x)],$$

$$v_i^f(s) = \frac{32 - z_i(s)}{R_i(s)} \tag{42}$$

来结束后掠了。层状土质中的整个的温度分布由

$$u_n(x) = U_i(x) v_i^w(x) + w_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], x < s$$

$$u_n(x) = R_i(x) v_i^f(x) + z_i(x), x \in [x_{i-1}, x_i], x > s$$

给出。

如果 $\alpha(n\Delta t) < 32$，那么不会出现水的状态。在这种情况下，我们无需用含有 U_i 和 w_i 的前掠以及（40）* 中的函数；代之以通过计算 R_i 和 z_i 求得关于冰状态的前掠。在表面 $x=0$ 处温度 $u^f(0) = \alpha(n\Delta t)$. 因此，由 Riccati 变换（37）看来，梯度 $v_1^f(0)$ 必须选择得使

$$\alpha(n\Delta t) = R_1(0) v_1^f(0) + z_1(0)$$

即

$$v_1^f(0) = \frac{\alpha(n\Delta t) - z_1(0)}{R_1(0)}$$

这个值 v_1^f 和 $s=0$ 是用于通过积分（42）来结束后掠的。

总之，对于层状土壤中具有状态变化的自由界面的传热问题（1），我们有了一个意义明确的分析求解算法。我们还必须说明这个仅在形式上表示出来的算法是实际地能应用的。于是，我们需

* 原文此处误为（38）。——校注

要证明已知前一个时刻的解 $\{u_{n-1}(x), s_{n-1}\}$，能用这个算法实际地计算 $\{u_n, s_n\}$.

为了论证上面的后掠方法能用于计算解 $\{u_n, s_n\}$，必须确立上面的一些方程的三个性质，即 Riccati 方程（35）和（38）有有界解，以及函数方程（40）有一个根。如果这情况是确定的，那么，所有其他方程，因为都是线性常微分方程，所以有解。关于 Riccati 方程的存在问题容易解决。我们从（35）看到，$U_1(0)=0$ 以及 $U_1'(0)=1$，并且每当 $U_1(\hat{x})=0$ 总有 $U_1'(\hat{x})=1$. 因此，在 $[0, x_1]$ 上 $U_1>0$. 又，如果 $U>\sqrt{1/\eta_1^w}$，则 $U_1'<0$，这保证了在 $[0, x_1]$ 上 $U_1\leqslant 1/\sqrt{\eta_1^w}$. 类似的分析可应用于 U_2，进而依次应用于 U_j，$j=3, \cdots, M$. 一个类似的论证表明，在 $[0, X]$ 上 $-\infty<R_j<0$，

下面要着手处理的是函数（40）* 零点的存在问题。因为表面温度低于冰点时，这函数并不开始起作用，我们可假定 $\alpha(n\Delta t)>32$。从（35）**和（40）可以得出 $\lim\limits_{x\to 0^+} U_1(x)=0+$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\Phi(x)=+\infty$***，类似地有 $\lim\limits_{x\to X^-}\Phi(x)=-\infty$****，且与 s_{n-1} 可能的位置无关。如果 Φ 是连续的，那么这问题本身将得到解决。因为 z_j 和 w_j 在固定界面连续，以及 $k_j^w U_{j+1}(x_j)=k_{j+1}^w U_j(x_j)$ 和 $k_j^+ R_{j-1}(x_{j-1})=k_{j-1}^f R_j(x_{j-1})$，我们看到，（40）的头两项是连续的。但是，最后一项因为一般来说 $\lambda_j\rho_j\neq\lambda_{j+1}\rho_{j+1}$，所以在界面上会出现跳跃。按概念的观点，这种情况不会导致任何困难。我们将单纯地从 $x=0$ 起追踪 $\Phi(x)$，直到它取零或负时为止；如果把 Φ 取成在界面上左

---

* 原文此处误为"（38）"。——校注
** 原文此处误为"（38）"。——校注
*** 原文此处误为"$-\infty$"。——校注
**** 原文此处误为"$+\infty$"。——校注
**** 原文此处误为"non-negativ"。——校注

连续，这样的点是意义明确的。

因此，总的说来，由于在每一个层次上所有方程都有解，所以上面的算法对于计算自由界面问题（4）的解 $\{u_n, s_n\}$ 是一种可行的数学方法。

这个问题有两个重要方面还待研究。首先其中之一与工业场合有关。人们怎样用上面的方法求得有效的（也就是数值的）解答？毕竟，这一方法已表示成为常微分方程的初值问题了。因此，关于它们的积分方法必须研究。另外，必须求非线性（也许还不连续的）函数的零点。这个问题也需要某些说明。我们将在下面相当详细地讨论用上面的方法如何求得数值解。第二方面与计算出的答案收敛于连续问题的解有关。一般地，数学家对这点会有兴趣，我们将在最后一节讨论；非数学家通常像下面说明的那样，根据计算结果判定收敛性。

前掠和后掠方程的数值解，可以十分简单地得到。因为用一个能精确近似的简单后向差商去代替连续的斯忒藩问题，近似的截断误差为 $o(\Delta t)$. 对于这特定变量，使用一个二次积分仪看来是极适当的。此外，一般地可以说，隐式积分方法比起显式方法呈现更好的稳定性。隐式方法之所以不再采用，是由于一个方程必须把未知量解出来。如果方程是非线性的，那么这个问题就复杂了。幸亏，如果用梯形法则以求得前掠和后掠，那么，这种困难不至于发生。现在让我们追踪一下梯形法则怎样应用于现有方程。为明确起见，假定我们需要求 $[0,x_1]$ 上的 $U_1(x)$ 和 $w_1(x)$. 我们定义 $[0, x_1]$ 的一个分划 $\{o=x^0<x^1<\cdots<x^m=x_1\}$，并置 $\Delta x_j=x^j-x^{j-1}$，$j=1$，…，M. 那么，在网格点上的 U_1 和 w_1 可从梯形公式

$$U_1(x^j)=U_1(x^{j-1})+\frac{\Delta x_j}{2}\left[2-\eta_1^m(U_1^2(x^j)+U_1^2(x^{j-1}))\right],$$

$$U_1(x^0)=0$$

$$w_1(x^j) = w_1(x^{j-1}) + \frac{\Delta x_j}{2}[-\eta_1^w U_1(x^j)(w_1(x^j) + u_{n-1}(x^j))$$
$$- \eta_1^w U_1(x^{j-1})(w_1(x^{j-1}) + u_{n-1}(x^{j-1}))],$$
$$w_1(x^0) = a(n\Delta t)$$

递归地求得。头一个方程是二次的，因而可以用现成的方式解出未知量 U_1 (x^j)；一旦 U_1 (x^j) 知道了，第二个方程关于 w_1 (x^j) 是线性的，于是解出它是毫无困难的。类似的说法也适用于 R_j 和 z_j. 用这种方法，可以算出分布于整个区间［0，X］上的离散的网格点的 U_i，w_i，R_j 和 z_j.

只要知道了在整个区间［0，X］的网格点上的 U_i，R_j，w_i 和 z_j，Φ 在网格点上的值便知道了。为了求使 $\Phi(x)=0$ 的自由界面，我们可以简单地计算函数在每一个网格点上的值，并在首次使 $\Phi(x^k)\cdot\Phi(x^{k+1})\leqslant 0$ 的两个网格点之间，用线性内插的方法安置 s. 一般说来，s 不会和分划的网格点重合。既然这样，就存在不同的选择方案，或者把 s 加到分划里去，而 U_i (s)，w_i (s)，R_j (s) 和 z_i (s) 用梯形法则算出，或者把 s 移到最靠近的网格点去。后一个方法十分简单并被证明满足要求。最后，在 s 的位置被固定以后，把梯形法则用于积分 v_i^w 和 v_i^f，然后把 v_i^w 和 v_i^f 用于确定时刻 $t=n\Delta t$ 在［0，X］上的整个温度分布 u_n (x).

注解 前、后掠方法通常称为不变嵌入方法。这种初值问题解法的详尽讨论可在［8］中找到。

4. 应　用

上面的模型和数值解法，曾用于评价永久冻土上机场跑道的各种可供选择的设计。模型被认为是可用的，因为热边缘效应看来好像不会扩大到离跑道边缘超过 4～5ft 的地方，因此，在建筑物的承载部分下面的热流本质上是一维的。

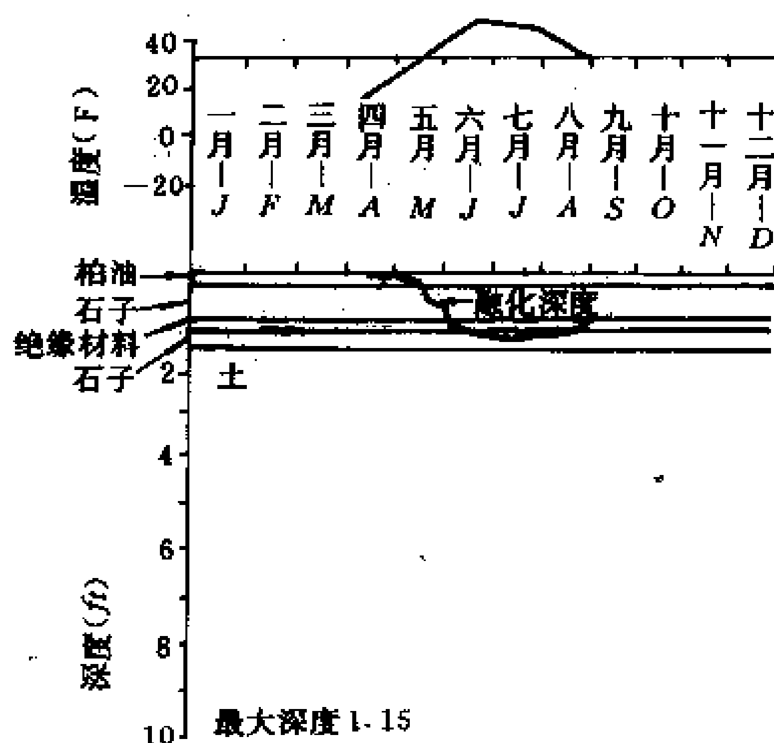
因为某些不确定性存在于进行计算时所必需的数据中，所以，一切参数须在相当大的范围上变动，这需要大量的计算。幸好，现有的设备和计算机计算的速度使得能够有效地利用计算机图形法。计算结果随着计算直接地在电视荧光屏上（而不是在一大堆纸上）显示出来。两张根据电视照片重新画出的图表，表明了在永久冻土上人造的四层结构中，当输入两种不同温度时的典型结果。

广泛的实验表明了所得结果是以季节性为周期的，而在很大的时间间隔（多达 40 年）里没有长期积累作用。因此只显示出一个循环。从四月开始算起直到表面温度达到冰点时为止。自然，我们所关心的主要的量是最大融化深度；既然那时融化深度总是已经开始下降，所以此时（介于 10 月初和 10 月中旬之间）终止了计算。

图 22.2 表示了作为时间的函数的表面温度 $\alpha(t)$ 的曲线（时间轴是水平的，而且标出了一月，二月等等。），以及测定透过柏油、石子、像泡沫聚苯乙烯那样的绝热材料和搁在永冻状态的泥土上的石子结构的融化深度 $s(t)$ 的曲线。正如所看到的那样，对于图表右边显示出的热参数，界面 $s(t)$ 并没有深入到土中去。

图 22.3 表示了当夏天温度增加 10F 的情况下的同样的系统。这时，界面被看成进到了在绝热材料下面含水分的石子处；不过，永久冻土仍然逃脱了夏日里的融化。由于算法迅速，所以对 $\alpha(t)$ 输入的许多其他温度作了试验。因为土的表面温度的易变性，所以这种试验是重要的。已经发现，土的年平均温度比相应的陆空的温度高好几度。然而，逐日的记录（目前还没有）对于这个模型仍是需要的。一个尝试已经使得计人具有形式

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t)u(0,t) - \alpha(t))$$



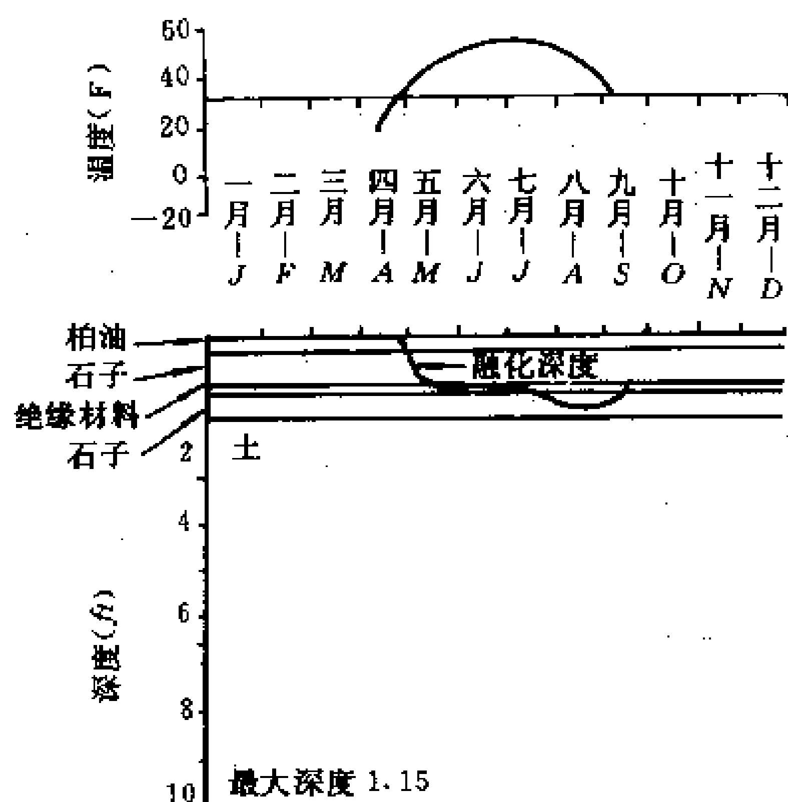
层次	材料	厚度	深度
1	柏油	0.5	0.5
2	石子	0.5	1.0
3	绝缘材料	0.2	1.2
4	石子	0.5	1.7
5	土	200.0	201.7

传导率

层次	冰	水	土	岩石
1	20.00	20.00	0.00	0.20
2	75.00	50.00	1.00	0.35
3	1.20	1.20	0.00	0.20
4	75.00	50.00	1.00	0.35
5	60.00	40.00	1.00	0.50

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
温度	—9.9	—13.3	—7.7	8.6	25.9	39.1	47.5	45.2	36.0	22.6	6.5	—3.7

图22.2　在柏油-上一层石子-绝热材料等多层结构下的融化深度



层次	材料	厚度	深度
1	柏油	0.5	0.5
2	石子	0.5	1.0
3	绝缘材料	0.2	1.2
4	石子	0.5	1.7
5	土	200.0	201.7

传导率

层次	冰	水	土	岩石
1	20.00	20.00	0.00	0.20
2	75.00	50.00	1.00	0.35
3	1.20	1.20	0.00	0.20
4	75.00	50.00	1.00	0.35
5	60.00	40.00	1.00	0.50

月份	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	12
温度	−9.9	−13.3	−7.7	8.3	36.0	50.0	57.5	55.0	46.0	6.5	−3.7

图 22.3 在柏油-上一层石子-绝热材料多层结构并有非常高的表面温度下的融化深度

的对流的表面牛顿冷却，其中传热系数 h 根据雪的覆盖层和风的速度来调节。依然，由于可靠的数据不足，因此，计算结果只起着表示趋势的作用，而不是确切的值。

在进行这些计算时，时间和空间的步长对于计算答案的影响被探讨过。通常认为，这里讨论的隐式近似是稳定的；因此，一般把网眼选得充分小使得对于进一步加细的网眼，计算机的答案变化很小；但是，为了想加速计算，又要把网眼选得充分大。通常，实践经验将指出最佳的网眼大小。

注解 对于参数进一步详细研究有兴趣的读者可参考[9]，在那里提供了参考文献。关于土和永久冻土的更多的数据可以在[4]，[10] 中找到。

5. 收 敛 性

从工程和管理的观点看，模型的建立表示相当完整地描述了层状土质中热的传导。已经说明了这个模型在各个时刻有一个解 $\{u_n, s_n\}$，而且这个解可以通过完全初等的方法数值地得到。对于一个数学家来说，问题不能就此结束，因为对于近似解确实在某种意义上接近于斯忒藩问题 (9) 的连续解这点尚未给出保证。还需要证明当 $\Delta t \to 0$ 时，$\{u_n, s_n\}$ 到 $\{u(x, n\Delta t), s(n\Delta t)\}$ 的收敛性。据我们目前的了解，不对模型附加一些假设，这种收敛性的证明不可能进行到底，这些假设，未必能由具有状态变化的热传导的物理学来证明，事实上也可能不为我们的模型所满足。因此，收敛定理的叙述只意味着线性近似的方法（至少在一定的特殊情况下）可以运用。

为了使问题变得容易处理，我们把模型简化为只由具有规定的表面温度 $\alpha(t)$ 和底部温度 U_X 的仅有的一层所组成。让我们对所有热学量附以下标，在界面 $s(t)$ 上面的用1，下面的用2. 那

么，在第 n 个时刻连续而准确的方程是

$$k_i u_{ixx} - c_i\rho_i u_{it} = 0; k_i u_i^{''} - \frac{c_i\rho_i}{\Delta t}[u_i - u_{n-1}(x)] = 0, i = 1,2$$

$$u_1\ (t) = \alpha\ (t),\ u_2\ (X) = U_X \quad u_1\ (0) = \alpha\ (n\Delta t)^*$$

$$u\ (x_1,\ 0) = u_0\ (x),\ u\ (s\ (0),\ 0) = 0,$$

和自由界面条件

$$0 = k_1 u_{1x} - k_2 u_{2x} + \rho_1\lambda\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}; k_1 u_1^{'} - k_2 u_2^{'} + \rho_1\lambda\frac{s - s_{n-1}}{\Delta t} = 0,$$

$$u_1(s(t),t) = u_2(s(t),t) = u_1(s) = u_2(s) = 0.$$

（为叙述容易起见，我们选取 $u=0$ 作为状态转变温度。）我们知道，这种问题有唯一的古典解。我们来叙述最后的收敛定理。

定理 如果 $u_1\ (x,\ t)$，$u_2\ (x,\ t)$ 和 $s\ (t)$ 为连续自由界面问题的解，而 $U_1^N\ (x,\ t)$，$U_2^N\ (x,\ t)$ 和 $s^N\ (t)$ 是由置

$$U_i^N(x,t) = u_i(x)$$

$$s^N(t) = \frac{t_n - t}{\Delta t}s_{n-1} + \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t}s_n, t \in (t_{n-1}, t_n)$$

定义的近似解，那么，对于某个固定的最后时刻 T，当 $\Delta t = T/N \to 0$ 时，$U_1^N\ (x,\ t) \to u_1\ (x,\ t)$，$U_2^N\ (x,\ t) \to u_2\ (x,\ t)$ 以及 $s^N\ (t) \to s\ (t)$（在弱意义下）。

对于这个定理的证明，需要相当多的基础，又有一定的复杂性，我们把它省略了。详细情况，读者可参考 [12]。

练　　习

1. 对于变化的传导系数 $k=k\ (x,\ t)$，由傅立叶的传导定律导出傅立叶的热传导方程。你能考虑一个可能出现变化的 k 的热模型吗？
2. 导出三维空间中的热方程。利用或者关于任意的控制体积的散度定理或者考虑一个立方体作为控制体积的散度定理。

---

* 原文此处多一个 "$u_2\ (X) = U_X$"。——校注

3. 假定水在 $x=0$ 处与火墙接触，而在 $s(t)$ 处与总是正好保持 32F 的冰块接触。求描述水中温度的自由边界问题。这是一个实际的冰水系统模型吗?
4. 利用回代验证不变嵌入方程对于界面问题的正确性。
5. 求 Riccati 方程（35）的紧凑解。
6. 求 $U'=1+4U-U^2$，$U(0)=0$ 的解的渐近线。
7. 讨论梯形法则用于 $u'=\sin(u+t)$，$u(0)=0$ 时的困难。
8. 对于问题 $u_{xx}-u_t=0$，$u(x,0)=u_0(x)$，$(\partial u/\partial x)(0,t)=\alpha(t)$，$u(1,t)=g(t)$ 建立不变嵌入方程。
9. 写出练习 3 的自由边值问题的不变嵌入方程。
10. 当每一个二阶问题写成

$$u_i' = \frac{1}{k_i} v_i,$$

$$v_i' = \frac{c_i \rho_i}{\Delta t}[u_i - u_{n-1}(x)],$$

以代替（23）时，建立不变嵌入方程。
11. 讨论第 4 节中的图表怎样才能结合成永久冻土上飞机跑道的最经济结构的完整模型。
12. 对 $u_{xx}-u_t=0$，$u(0,t)=t$，$u(1,t)=1$，$u(x,0)=x$，作数值积分。
 a）前向有限差分格式，
 b）直线法。
 探讨在两种情况下，当 Δt，$\Delta x \to 0$ 时计算出的解的性质。
13. 为了考虑形如

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h(t),(u(0,t) - a(t))$$

的对流的表面冷却作用，修改层状介质的模型和解法。
14. 用公式表示大湖冰冻的斯忒藩问题，写出计算机程序，并探讨各种热学的和数字的参数之作用。
15. 讨论人们为什么不能忽略不计层中的状态变化而作为简单的一种状态的热流问题来解这系统。

参 考 文 献

[1] W. S. Ellis, "Will oil and tundra mix?" *National Geographie*, vol. 140, p. 485. 1971

[2] R. D. Guthrie *et al.*, "North to the tundra", *National Geographic*, vol. 141, p. 294, 1972

[3] B. Keating, "North for oil", *National Geographic*, vol. 137, p. 294, 1970

[4] *Proceedings Permafrost International Conf.*, 1963, National Academy of Sciences, National Research Council Publication 1287, Washington, DC.

[5] L. R. Ingersoll, O. J. Zobel and A. C. Ingersoll, *Heat Conduction with Engineering and Geological Applications*, McGraw-Hill, New York, 1948

[6] J. Ockendon and W. Hodgking, Eds., *Moving Boundary Problems in Heat Flow and Diffusion*. Oxford: Clarendon, 1975

[7] L. Rubinstein, *The Stefan Problem*, Transl. Math. Monog. 27, A. Solomon, tr. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1971

[8] G. H. Meyer, *Initial Value Methods for Boundary Vahte Problems*. New York: Academic, 1973

[9] G. H. Meyer, N. N. Keller and E. J. Couch, "Thermal model for roads, airstrips, and building foundations in permafrost regions," *J. Canadian Petroleum Technol.*, Apr. —June 1972

[10] M. S. Kersten, *Thermal Properties of Soils*, Bull. 28, Eng. Exp. Sta., University of Minnesota, 1949

[11] J. A. Wheeler, "Permafrost thermal design for the TransAlaska Pipeline," in *Moving Boundary Problems*, D. G. Wilson, A. D. Solomon, and P. T. Boggs, Eds. New York: Academic, 1978

[12] G. H. Meyer, "A numerical method for two-phase Stefan problems," *SIAM J. Num. Anal.*, vol. 8, pp. 555—568, 1971

教 师 参 考

目的 第 1 节包含了要解决的问题和关于这一工作的动机。第 2 节介绍以基本的传热原则为基础的数学模型的配套的公式。第 3 节包含数学模型解的算法。举例说明了偏微分方程的直线法和常微分方程两点边值问题的初值解法。第 4 节含有根据一个工业参数研究的典型结果。第 5 节介绍了收敛定理和收敛性的讨论，但没有证明。

预备知识 第2、3节只需要微积分和一些近代数学。不要求有偏微分方程的特殊知识，但是先涉及一下常微分方程是有帮助的。

时间 3～4次。

第 23 章

蒸汽发生器流程的网络分析

T. A. Porsching*

1. 问题的起源

在这开头一节，我们要探讨蒸汽发生器在核发电厂的全部工作中的作用。这样，我们希望着眼于终将逐渐形成的数学问题，并强调它的重要性。

图 23.1 表示核发电厂的主要流程。利用这个图，可以描绘出由核燃料的裂变而产生的热能转换为涡轮的机械能的路线。注意到存在称为第一级回路和第二级回路的独立流体回路。第一级回路中的流体用泵打到核反应堆堆芯，在那里它会经受升高 40～70℉ 的特有温度。流体自堆芯沿着管道通过热段而进入蒸汽发生器的管子。这里，它所得到的热通过管壁转移到蒸汽发生器的管际空间。离开蒸汽发生器的较凉（～500℉）的流体就被泵打到冷却段并返回到核反应堆堆芯。

第二级回路中的水进入蒸汽发生器的管际空间，并且沿着热

* Department of Mathematics and Statistics, University of Pittsburgh, Pittsburgh, PA 15260.

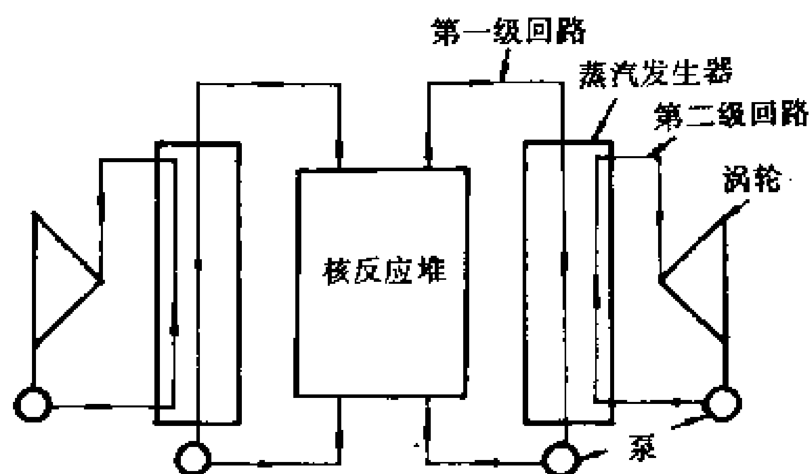


图 23.1　核发电厂略图

图



管子的表面经过，转换成蒸汽。然后，这蒸汽的热能以带动涡轮的机械功的形式被消耗。经过涡轮后，冷凝蒸汽返回到蒸汽发生器。

图 23.2 表示蒸汽发生器的断面图。为了得到关于这个装置的数据概念，我们指出在 [1] 第 23 章中报道的位于南卡罗来纳 (South Carolina) 的奥科尼 (Oconee) 核电站的蒸汽发生器。两个基数是长近似于 73ft，直径近似于 12ft. 每一个发生器，大致含有 15 500 个管道，重约 600T.

由于管道的长度超过 60ft，而直径只约等于 3/4in，所以在它的中部给予支撑显然是必需的。在图 23.2 的零件图中，表示了这些管道支撑板之一的部分。注意到孔已经钻开的三个区域，它为第二循环的流体提供通道。

"涉及这些热交换器型的蒸汽发生器的主要保养问题是管漏，它可能由化学的或机械的作用，也可能是二者共同造成的"[1]。

因为管通含有放射性反应堆冷却剂，所以这是一个有关核蒸汽发生器的严重的事情。尽管导致点蚀的确切机理还不完全了解，但是它与化学及管际空间流体的流动分布有紧密联系。例如，明显地，周期地存在着部分管道不被管际空间流动的蒸汽-水混合物所覆盖。这种情况称为"无水"的，并被认为是导致管道损坏的关键因素。还有，在低流动区内，粒子可以从流体中析出而在管面上形成腐蚀性沉积物。事实上，[19]，[20] 已经讨论过了，表面的粒子沉积由等式 $N=KC$ 决定，其中 N（质量/时间×面积）为粒子沉积通量，C（质量/体积）为平均粒子浓度，而 K（长度/时间）为沉积系数。最后一个量是粒径和局部流体速度的函数。从表示 K 的典型曲线的图 23.3 中，我们看到，K 强烈地依赖于这个速度。利用 N，计算表面上已知大小的粒子的积累是件简单的事情，因为如果我们假定 N 是常数，那么 Nt 表示在 t 个时间单位内落在表面的单位面积上的粒子的质量。因此，如果假设在 $t=0$ 时

表面是清洁的，那么，在时刻t的沉积厚度$h=Nt/\rho=KCt/\rho$，其中ρ为颗粒物质的密度。因为C和ρ通常是可得到的，所以测定沉积物积累的能力，基本上依赖于测定流速的能力。

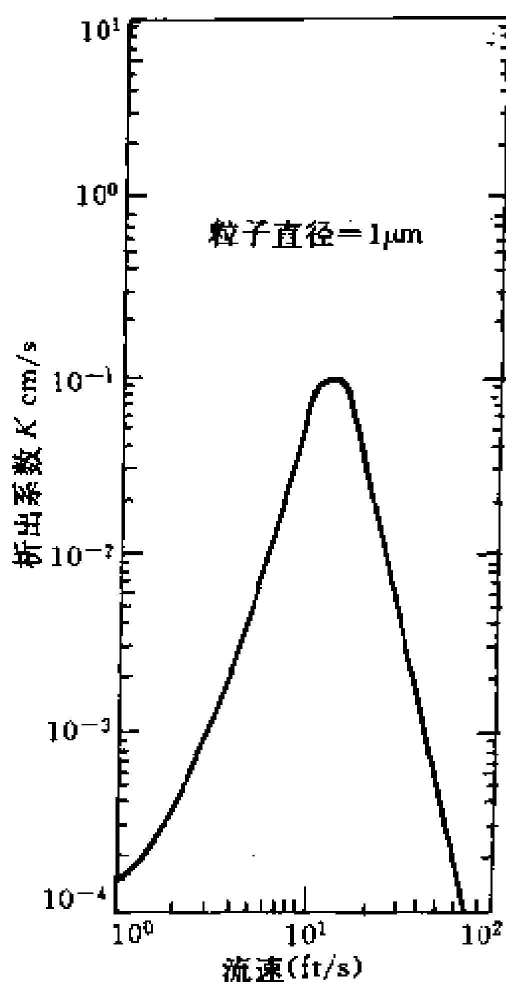


图 23.3　析出系数和流速的特性（根据［20］）

基于上面的考虑，得到一个管际空间流动分布的实际的近似是重要的。由于管际空间的复杂的三维几何形状，双相蒸汽-水混合物的出现，以及决定流动的守恒定律固有的非线性，看来最一般地解决这个问题是不可能的。但是，通过利用某种简化的假说和采取特殊的着眼点，我们可以得到一个易于处理的数学模型，这模型提供流动问题的一个满意的数值解法。

在下一节，我们将提出这个模型的简化形式，并介绍它的数值解法。尽管这里提供的资料是打算给课堂讲授用的，但我们还是要强调，这思想正是可以用来分析在蒸汽发生器中的流量的更精巧的方法的核心所在。

2. 网络理论的一些基本原理

正如我们在前面已经提到过的，分析管际空间蒸汽发生器的

流动是极端复杂的问题。我们的办法是在考虑沿既定流程流动的意义下，将连续问题变为离散的。事实上，我们打算把在蒸汽发生器的一个区域上的流动归并成关于这个区域的一个简单的平均流动，接着用公式表示这些归并成的流动该服从的规律。在其上出现不连续流动的相互连接的流程系统被称作**网络**。关于网络的文献早已非常之多并还在继续增加。在这一节，我们只涉及讨论我们的问题所必需的极少几个概念。关于网络、图* 和其他的不连续流动问题等科目的进一步读物，见［2］～［5］，［21］。

我们抽象地定义网络 η 为一个偶 (V, S). 这里 V 是无序元素（称作**结点**）的一个有限集，而 S 是 V 的元素的序对（称作弧**）的集合。在模拟流动问题时，结点将相当于流动在那里改变方向的连接点，而弧将确定流程。我们假定 V 中有 n 个元素，而 S 中有 m 个元素。

因为结点与前 n 个正整数同构，所以我们设 $V=\{1, 2, \cdots, n\}$. 另一方面，η 的第 j 个弧 s_j 用 $(P(j), Q(j))$ 表示，其中 $P(j), Q(j) \in V$. 于是我们可以写成 $S=\{s_j \triangleq (P(j), Q(j)) \mid j=1, 2, \cdots, m\}$. 结点 $P(j)$ 和 $Q(j)$ 分别地称为弧 s_j 的**始点**和**终点**，同时，它们构成了弧的**末端**。同样地，亦称弧 s_j 关联于结点 $P(j)$ 和 $Q(j)$。

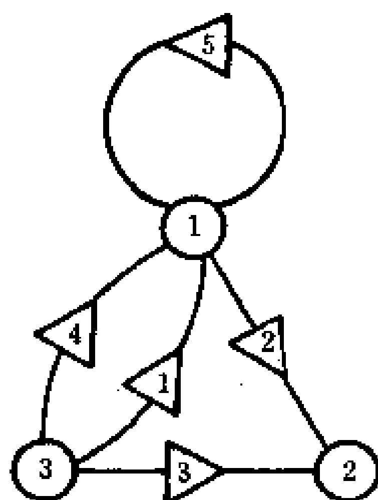


图 23.4　简单网络

这些代数定义是用几何学诱导出来的。通过把结点画成加编号的圆，把弧

---

* 尽管网络和图之间的差别是含糊的，不过，我们想把术语“网络”用于强调带有流动的系统的观念。另一方面，“图”是关系的框架，它不蕴含任何特定的流动。

** 原文为 link，是连接线的意思，为方便计，译为‘弧’。

（指连接线）* 画成弧形，位于弧上的箭头指出从开始结点到终了结点的方向，我们得到网络的一个完整的描述。比如，在图 23.4 中，我们描绘了由集合

$$V=\{1,2,3\},$$

$$S=\{(3,1),(1,2),(3,2),(3,1),(1,1)\}$$

定义的网络。注意环 $s_5=(1,1)$ 和有相同方向但又有差别的弧 $s_1=(3,1)$，$s_4=(3,1)$ 等的出现。因为环一般地不描述有实际意义的流程，所以在今后考虑时，我们将把它们排除在外。

一个网络的弧序列 $\{s_{i_1},s_{i_2},\cdots,s_{i_k}\}$，如果对于 $j=2,\cdots,k-1$，弧 s_{i_j} 和 $s_{i_{j-1}}$ 有一个公共的末端以及 s_{i_j} 的另一个末端与 $s_{i_{j+1}}$ 的相同，那么，这序列为一个**链**。称结点 p 和 q 为**连通的**：如果存在一个链 $\{s_{i_1},\cdots,s_{i_k}\}$，使得 p 和 q 分别为弧 s_{i_1} 和 s_{i_k} 的末端。如果网络的每一对结点是连通的，那么，网络本身就是连通的。由于液体按固有的连续方式** 流动，我们将限制于研究连通的网络。

在模拟流动问题时，我们将利用基本的质量守恒定律。这个定律的网络模拟称为基尔霍夫（Kirchhoff）结点定律，并且用数学公式表示如下。对于 η 的每一个结点 i，我们联系两个弧的集合

$$\omega^+(i)=\{(i,k)\mid k\in V,(i,k)\in S\}$$

和

$$\omega^-(i)=\{(k,i)\mid k\in V,(k,i)\in S\}.$$

不严格地说，$\omega^+(i)$ 是关联到结点 i 上的弧的集合，并朝着离开这个结点的方向，而 $\omega^-(i)$ 包含那些朝着来到这结点的方向的弧。对于 η 的每一个弧 s_i，使它联系一个实数 w_i. 那么，只要

$$\sum_{s_j\in\omega^+(i)}w_j-\sum_{s_j\in\omega^-(i)}w_j=0,i=1,\cdots,n. \tag{1}$$

---

* 此处为编者所加。——译文编者

** 至少有一种著名的例外情形。见 [6]。

m 维向量* $w = (w_1, \cdots, w_m)^T$ 就是**关于 η 的一个流动**。

等式（1）表示基尔霍夫的结点定律，它说明净流入一个结点的量等于净流出那个结点的量。如果 w 是一个流动，那么 w_j 是弧 s_j 上的流量。实际上，w_j 的更准确的叫法该是弧流率。因为它们的单位原来是每单位时间的质量，比如 lb/s. 注意到，弧的流量可以采取两种符号。我们按通常的习惯，$w_j>0$ 意味着弧 s_j 的流动的实际方向是从始点到终点的，而 $w_j<0$ 意味着流动的实际方向是从终点到始点的。

等式（1）可以写成方便的紧凑形式，这涉及引入（结点-弧）关联矩阵。这是 $n\times m$ 矩阵 $A=[a_{ij}]$，其中

$$a_{ij}=\begin{cases}+1, \text{如果 } i=P(j)\\ -1, \text{如果 } i=Q(j)\\ 0, \quad \text{其他。}\end{cases}$$

例如

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & -1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1\end{bmatrix} \tag{2}$$

为对应于图 23.4 中的网络（除去了环 s_5）的关联矩阵。利用这种矩阵，（1）显然成为

$$Aw=0. \tag{3}$$

因为任一个弧是关联于它的始点和终点上，而且只有那些结点，所以，A 的每一列，除零以外，正好包含一个 $+1$ 和一个 -1. 因此，A 的各列加起来的和为零向量，于是它的行秩小于或等于 $n-1$. 事实上，**恰好等于** $n-1$. 为了证明这点，我们去掉 A 的第 n 行。为此，注意到，关联到结点集 $V_1=\{n\}$ 上的诸弧决定的诸列正好含有一个非零项。这些非零项所在的行，不可能在 A 的行的

---

* 我们将常用上标 T 表示转置，于是 w 为一个列向量。

任何等于零的非平凡线性组合中出现。于是我们可以把它们从 A 中去掉，但是同样的这些行确定了一个结点集合，比如说 V_2，而且对于关联于 V_2 上以及在 V_2 的余集中有另外的末端的弧，我们可以重复上面的论证。因为假设了 η 的连通性，所以这种过程将终于取尽 A 的前 $n-1$ 行，表明它们是独立的。

因为一个矩阵的行和列的秩是相同的（比如见 [7, p. 42]），所以我们直接得到 A 的零空间的维数为 $m-(n-1)$. 因此，关于 η 的最一般的流动依赖于 $m-n+1$ 个任意参数。显然，我们需要导出更进一步的条件，以便从（3）的许多解中挑出特定的流动。

在模拟流动的问题中，必须包括处理**边界条件**的方法。这些条件在那些流体进入和离去有意义的区域上成立，例如，在图 23.2 中靠近管板的区域。在一个网络中，边界条件通过选定某些结点为**边界结点**、并在这些结点上规定适当的条件来提供。因为边界结点对应于流体进入和离去网络的点，所以不能期望基尔霍夫的结点定律在它们上面成立。但是，作为将这个定律作用于网络的一切其他结点上的推论，我们可以证明，边界流动的总和等于零。换言之，流入网络的全部等于流出的全部。为了证明这个命题，我们假设 $n-v>0$，边界结点存在，编号为 $v+1, \cdots, n$. 这样，我们可以把关联矩阵 A 分成为$\begin{bmatrix} A^0 \\ \partial A \end{bmatrix}$，其中 A^0 由 A 的前 v 行组成，并代表内部结点或非边界结点，而 ∂A 由 A 的后 $n-v$ 行组成，并且代表边界结点。如果我们分别地定义 u^0 和 ∂u 为坐标全为 1 的 v 和 $n-v$ 维的向量，那么，因为 A 是一个关联矩阵，我们有

$$(u^{0^T}, \partial u^T)\begin{bmatrix} A^0 \\ \partial A \end{bmatrix} = u^{0^T}A^0 + \partial u^T \partial A = 0.$$

因此，如果 w 为关于 η 的一个流动，则

$$u^{0^T}(A^0 w) + \partial u^T(\partial A w) = 0. \tag{4}$$

另一方面，基尔霍夫的结点定律用到内部结点上，就有

$$A^0 w = 0. \tag{5}$$

于是肯定 u^{0^T} $(A^0 w) = 0$，因而由 (4) 即得 ∂u^T $(\partial A w) = 0$，这就是我们要证明的。

图 23.5 所示的网络可以用来作为在蒸汽发生器的流动区域部分的模型。在这个网络中，边界结点为结点 13～18. 至于把物质的流动区域归结成此类网络的模拟方法，我们将在下一节讨论。

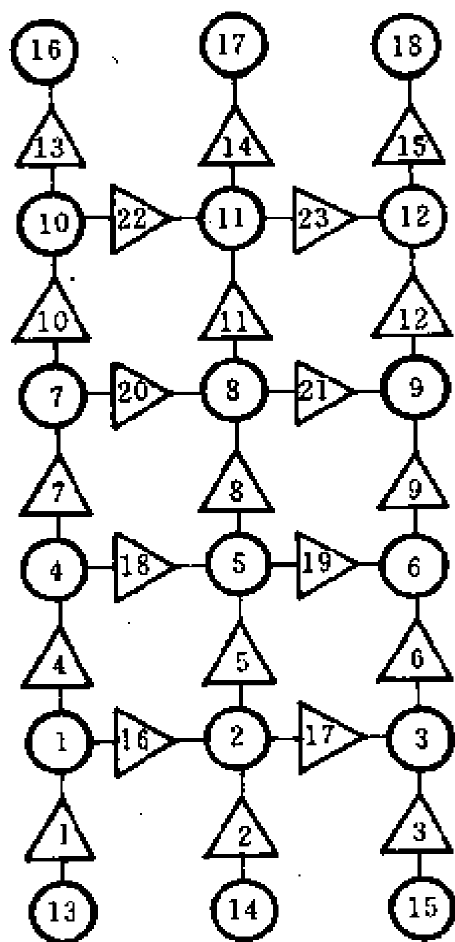


图 23.5　蒸汽发生器网络

如前所述，基尔霍夫的结点定律一般地不能唯一确定一个网络上的流动。

下面研究所需的附加条件。以流量和一个新的变量集合 $\{p_i\}$（此集合与结点或称作**结点状态**有关）之间的关系式的形式出现。在我们的流动问题中，这些状态可以理解为**静压**，这种静压在流动区域中的点上存在。我们想假设在每一个弧上成立的流动-结点状态关系式具有形式

$$w_j = f_j(p_{P(j)} - p_{Q(j)}). \tag{6}$$

这里 $f_j(t)$ 为变量 t 的函数，而 $\Delta p_j \triangleq p_{P(j)} - p_{Q(j)}$，为状态差分或弧 s_j 两端的压差。等式 (6) 称为**弧特征**，并且表明弧 j 上的流量仅仅是弧两端压力差的已知函数。

现在，我们可以考虑基本的网络流问题了。假定给了网络 η 的每一个弧的弧特征，网络 η 有 $n-v$ 个边界结点 $v+1$，…，n，在其上压力 p_{v+1}，…，p_n 是已知的。然后，我们试图确定压力 p_1，…，

p_v，以及流量 w_1，…，w_m，使之对于 $j=1$，…，m 满足特征（6）而对于 $i=1$，…，v（即在 η 在内部结点上）满足基尔霍夫结点定律（1）。我们看到，如果简单地把方程（6）代入（1）的前 v 个方程，那么，恰好得到 v 个未知数的 v 个方程。于是，如果唯一地存在满足这个系统的一组压力，那么，（6）对应地确定唯一的一组流量，从而问题就全部解决了。显然，压力所满足的方程为

$$\sum_{s_j \in \omega^+(i)} f_j(p_{P(j)} - p_{Q(j)}) - \sum_{s_j \in \omega^-(i)} f_j(p_{P(j)} - p_{Q(j)}) = 0,$$

$$i = 1, 2, \cdots, v. \tag{7}$$

我们称（7）为**网络方程**。

再一次利用关联矩阵，可以把网络方程写成简洁的形式。设 $p=(p_1, \cdots, p_n)^T$ 和 $\Delta p=(\Delta p_1, \cdots, \Delta p_m)^T$ 表示 n 维压力向量和 m 维压差向量。利用定义关联矩阵 $A=[a_{ij}]$ 的方法，容易明白

$$\Delta p_j = p_{P(j)} - p_{Q(j)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} p_i, j = 1, \cdots, m.$$

因此，$\Delta p = A^T p$，其中矩阵 A^T 为 A 的转置。设 $f(\Delta p) = f_1(\Delta p_1)$，…，$f_m(\Delta p_m)^T$，从（5）和（6）得到

$$A^0 w = A^0 f(\Delta p) = A^0 f(A^T p) = 0.$$

于是，（7）的另一种形式为

$$A^0 f(A^T p) = 0. \tag{8}$$

让我们写出图 23.5 所示网络的前三个网络方程。因为*

$$\Delta p_1 = p_{13}^* - p_1, \Delta p_2 = p_{14}^* - p_2, \Delta p_3 = p_{15}^* - p_3,$$

$$\Delta p_4 = p_1 - p_4, \Delta p_5 = p_2 - p_5, \Delta p_6 = p_3 - p_6,$$

$$\Delta p_{16} = p_1 - p_2, \Delta p_{17} = p_2 - p_3,$$

---

* 为了强调结点 13～15 为已知其压力的边界结点，对这些量用星号标出。

以及关于结点 1，2，3 的基尔霍夫结点定律分别地写作

$$w_4 + w_{16} - w_1 = 0,$$

$$w_5 + w_{17} - w_2 - w_{16} = 0,$$

$$w_6 - w_3 - w_{17} = 0,$$

我们得到

$$f_4(p_1 - p_4) + f_{16}(p_1 - p_2) - f_1(p_{13}^* - p_1) = 0,$$

$$f_5(p_2 - p_5) + f_{17}(p_2 - p_3) - f_2(p_{14}^* - p_2) - f_{16}(p_1 - p_2) = 0,$$

$$f_6(p_3 - p_6) - f_3(p_{15}^* - p_3) - f_{17}(p_2 - p_3) = 0.$$

注意到，在第一个方程（它对应于结点 1 的基尔霍夫定律）中，未知量 p_1 出现在每一项当中，而且随着对应的流量是增加或减少而乘上 $+1$ 或 -1. 对于其余两个方程可以得出类似的附注。实际上，这是通常的网络方程的一个性质。在第 4 节中，我们将利用这个重要性质以建立方程的数值解法。

此刻，我们可以对于网络方程提出两个基本的数学问题。

1）它们有唯一的解（甚至，它们究竟是否有解）吗？

2）如果有解，又怎样求出这个解？

在这节的剩下部分，我们试着回答问题 1），而问题 2）要推迟到第 4 节再考虑。

首先，除非对于函数 $f_j(t)$ 假定太多，这时问题 1）的答案是“没有”。例如，假定我们讨论的是对应于由图 23.6 所示的简单的只有一个弧的网络的网络方程。让我们假设结点 2 为边界结

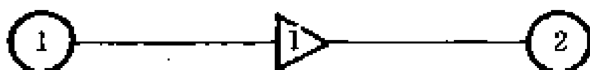


图 23.6　只有一个弧的网络

点，而其上的压力 p_2^* 等于零。那么，只存在一个方程，写作

$$f_1(p_1) = 0. \tag{9}$$

如果我们给定 $f_1(t)\equiv1$，那么（9）就没有解。另一方面，如果我们给定 $f_1(t)=\sin t$，那么（9）有无穷多个解。

幸好，经验已经证明，在实际中出现的函数 $f_j(t)$ 不像上述的那两种函数。事实上，我们有理由这样假设：当已给弧两端的压差（或推动力）增加时，在弧上的流量也增加。这就引导我们作这样的假设：**对于每一个 j，$f_j(t)$ 是 t 的一个严格增加函数。**这仍不足以保证给 1）一个肯定的回答，因为函数

$$f_1(t)=\begin{cases}t, & \text{如果 } t<0\\ 1+t, & \text{如果 } t\geqslant0\end{cases} \tag{10}$$

和

$$f_1(t)=1+e^t \tag{11}$$

两者都是严格增加的，但二者都不提供（9）的解。（10）的障碍是在 $t=0$ 处不连续，而（11）的问题是它的值域限制在正数上。我们可以通过假设 $f_j(t)$ 是 t 的连续函数且有一个无限制的值域* 来把这两种障碍去掉。这引导我们去确定如下那样的一个**容许特征**：$f_j(t)$ 定义在 $-\infty<t<\infty$ 上连续、严格增加且满足 $\lim\limits_{t\to\pm\infty}f_j(t)=\pm\infty$. 注意到，如果 $f_1(t)$ 明确表示有容许特征，那么，（9）正好有一个解。事实上，我们有下面的定理。

定理 1 *如果网络 η 的弧具有容许特征并且 η 至少有一个边界结点，那么，网络方程（7）或（8）有唯一的一个解。*

证明 我们不去证明这定理十分一般的情况，因为这样一个证明包含我们并不准备引入的概念。这种证明比如可在 [8] 中找到。不过，我们要在函数 $f_j(t)$ 为**线性**，即

$$f_j(t)=d_jt+c_j \tag{12}$$

（其中 d_j 和 c_j 为常数）的特殊情况下证明这个定理。这些确定容

---

* 假设在任一个弧上的流量是这弧两端压力差的连续函数，是十分自然的。但是，假设流量随着它的压力差变成无穷大，多少有些人为的，因为弧在有限流动时达到饱和更为合理。

许特征的充要条件为 $d_j>0$.

设 $D=\mathrm{diag}\,(d_1,\cdots,d_m)$，也就是对角矩阵，它的第 i 个对角线元素为 d_i. 同时设 $c=(c_1,\cdots,c_m)^T$，并假设末尾 $n-v$ (>0) 个结点为边界结点。如果我们返回到由（8）给出的网络方程的形式，我们知道，第 i 个方程是

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}d_j(A^Tp)_j+\sum_{j=1}^{m} a_{ij}c_j=0,\quad i=1,2,\cdots,v.$$

或

$$A^0D(A^Tp)+A^0c=0. \tag{13}$$

通过记

$$p^0=(p_1,\cdots,p_v)^T,$$

$$\partial p=(p_{v+1}^*,\cdots,p_m^*)^T,$$

$$p=\begin{bmatrix}p^0\\ \partial p\end{bmatrix},$$

$$A=\begin{bmatrix}A^0\\ \partial A\end{bmatrix},$$

可以分离出（13）的边界相关部分。事实上，现在可以把（13）写成

$$A^0D[A^{0^T}\,|\,(\partial A)^T]\begin{bmatrix}p^0\\ \partial p\end{bmatrix}+A^0c=0,$$

即

$$A^0D[A^{0^T}p^0+(\partial A)^T\partial p]+A^0c=0.$$

亦即

$$(A^0DA^{0^T})p^0=-(A^0c+A^0D(\partial A)^T\partial p). \tag{14}$$

方程（14）表示向量 p^0 的 v 个未知压力的 v 个线性方程构成的非齐次方程组（注意，（14）的右边是已知的）。根据线性方程组可解性的基本定理，(14)有唯一解的充分必要条件是 $v\times v$ 系数矩阵 $A^0DA^{0^T}$ 为非奇异的。

我们将通过反证法来证明 $A^0DA^{0^T}$ 是非奇异的。假定，存在一个向量 $x=(x_1,\cdots,x_v)T\neq0$，使得 $A^0DA^{0^T}x=0$. 这一来，$x^TA^0DA^{0^T}x=0$. 如果我们设 $z=(z_1,\cdots,z_m)^T=A^{0^T}x$，则最后一个方程成为

$$z^TDz=0. \tag{15}$$

因为 D 是一个对角矩阵，我们可以把（15）按普通写法写成

$$\sum_{j=1}^{m}d_jz_j^2=0, \tag{16}$$

但有每一个 $d_j>0$，于是要使（16）成立，唯一的办法是 $z_j=0$，$j=1,\cdots,v$. 因此 $z=0$. 根据 z 的定义，它是 A^{0^T} 的列的线性组合，也就是 A^0 的行的线性组合。其实，只要我们用 a_i 表示 A^0 的第 i 行，就有

$$z=\sum_{i=1}^{v}a_ix_i=0. \tag{17}$$

但是，我们已经知道，A 的秩是 $n-1$. 因此，向量 a_i，$i=1,\cdots,v\leqslant n-1$ 是线性独立的，因而（17）意味着 $x_i=0$，$i=1,\cdots,v$，这与 $x\neq0$ 矛盾。这就证实了 $A^0DA^{0^T}$ 的非奇异性，从而完成了证明。

□

我们再说一次，尽管这一证明只适用于（12）的线性情况，但定理对于广泛得多的函数类也是真的。例如，如果 $b_j>0$，$d_j>0$，和 c_j 都是常数，那么

$$f_j(t)=b_jt^3+d_jt+c_j$$

定义了一个容许的非线性特征。这个非线性的特征，我们将在下一节模拟蒸汽发生器流动问题时才采用。

3. 流动的模拟问题

现在，我们可以说明怎样建立蒸汽发生器的流动问题的模型，

使第二节中的网络方程可以应用。尽管推导将是非常通用的，但它有助于把这种思想应用于特殊的例子。假定我们想要确定图 23.2 中用图表示的蒸汽发生器管际空间部分的流动分布。图 23.7 所示的区域，关于管道支撑之一是对称的，而且延伸到相邻的板处。为简便起见，我们没有显示出管道来，但是人们必须记得它们使用这区域并且取直立方向。此外，尽管实际的流动区域是三维的，但是，图 23.7 中的区域，是在平面图中所示的蒸汽发生器的对称平面上取的一个二维切片。

我们通过添加假想边界的办法把这个区域分为有限个子区域(即网眼)。我们选用了 12 个这样的网眼，并且按图 23.7 的方式，把它们和结点联系起来编了号码。我们用虚线表示假想的边界。

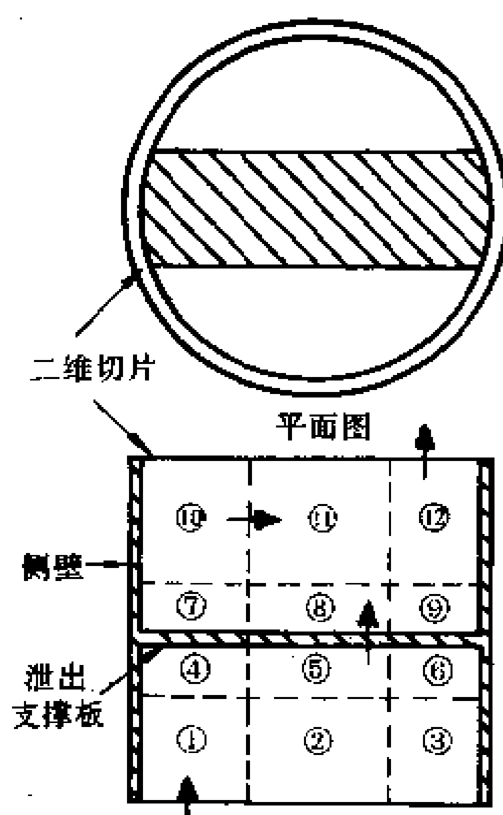


图 23.7 二维切片的分析

因为流体在两个相邻网眼之间的流动必定穿过它们的公共边界，我们可以通过把分布在整个边界上穿过的流动归并成单一的量（这个量表示穿过边界的全部流量），来计算出流动的信息。通过在相邻网眼之间添加弧的办法，几何地表示这种流动信息是很自然的事情。于是，在图 23.7 中，通过添加 17 条弧，连接了 12 个网眼的结点。为了辨认流体穿过 1，2，3 和 10，11，12 等网眼的水平边界时是流进还是流出这区域，我们把这些结点中每一个都连接到一个边界结点上。这种过程的几何实现，就成了图 23.5 的网络。

考虑网眼 i. 根据质量守恒原理，如果在网眼中没有流体生成或消失，流体密度又是常数，那么，穿过网眼边界时流出的总质量等于流入的总质量；然而，穿过边界的流动，可以被认为是相应网络的弧上的流动。于是，如果用 w_j 表示每秒穿过被弧 s_j 所贯穿的边界的流动质量的磅数，并假设 $w_j>0$ 对应于流体从 s_j 的起始结点到终点结点的流量，那么，对于网眼 i，我们有

$$\text{流出的总质量} = \sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j>0}} w_j - \sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j<0}} w_j,$$

$$\text{流进的总质量} = \sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j>0}} w_j - \sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j<0}} w_j.$$

因此

$$\sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j>0}} w_j + \sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j<0}} w_j = \sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j>0}} w_j + \sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j<0}} w_j,$$

即

$$\sum_{s_j\in\omega^+(i)} w_j - \sum_{s_j\in\omega^-(i)} w_j = 0. \tag{18}$$

这就是关于结点 i 的基尔霍夫的结点律。

一般地，在网眼的不同结点上，静压力取不同的值。相邻网眼的两个结点之间的压力差——这可以看作是穿过联结两个网眼的弧上的压降——起因于若干因素。我们将仅仅考虑这些因素当中的两个：

1）流体重量的作用；

2）管子表面的摩擦阻力和其他的运动流体不能透过的边界。

如果参照图 23.8，那么，在弧 s_j 上的流体的重量，导致结点 P（j）处的压力超过结点 Q（j）处的压力，其值为

$$(\Delta p_j)_{\text{el}} = \rho L_j g\cos\theta_j. \tag{19}$$

其中 ρ 为流体的（质量）密度，g 为重力加速度，L_j 为弧的长度，

而 Q_j 为弧对于铅直线的倾角*。注意，我们用下标 el 表示这个压力降落，因为它是由于弧的两个端点间的上升差造成的。

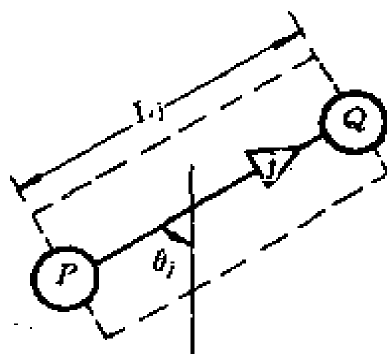


图 23.8 上升时压力降落

当流体运动越过了各个弧时，它绕着管子，沿着套管以及穿过管子支撑板中的泄出孔而流动。管子、套管和泄孔都将摩擦阻力作用于流体上，这些阻力和弧的两端间的压力差平衡。广泛的实验已经建立了这种压力降落的经验公式（更详细的叙述见 [9 的第 11 章]）

$$(\Delta p_j)_{\text{fr}} = \frac{F_j}{\rho A_j^2}|w_j|w_j, \tag{20}$$

其中 A_j 是弧的截面积**，而 F_j 为称作摩擦系数*** 的比例常数。

注意到，如果我们始终采用如下单位，质量用磅（记为 lb），力用磅达（1 磅达=0.138255 牛顿，记为 pdl），时间用秒（记为 s），而长度用呎（记为 ft），那么，（19）式右边的单位是

$$\frac{\text{lb}}{\text{ft}^3}\text{ft}\ \frac{\text{ft}}{\text{s}^2} = \left[\text{lb}\ \frac{\text{ft}}{\text{s}^2}\right]\frac{1}{\text{ft}^2} = \frac{\text{pdl}}{\text{ft}^2}$$

而（20）右边的单位为（F_j 是无量纲的）

---

* 注意，这里所说的"弧的长度"与"倾角"都是实际的"几何量"，它不包含在网络的定义中。其度量可将"弧"看作是连结它的两端所代表的几何形体中心的有向线段而获得。——校注

** 弧是概念上的东西，要说它的截面积多少有些含糊（长度的情况也是如此，不过，取结点间的距离为长度是自然的）。一种指定截面积的办法是，用关联于其上的弧的数目去除网眼的体积，指定这些子体积于相应的弧，然后定义截面积为弧的体积与弧的长度之比。例如，如果 S_{16} 连结图 23.7 中的结点 1 和 2，那么

$$A_{16} = \frac{1}{L_{16}}\left(\frac{\text{网眼 1 的体积}}{3} + \frac{\text{网眼 2 的体积}}{4}\right)$$

*** 摩擦系数的定义因作者而异。我们的定义是为了产生摩擦压力降落 $(\Delta p_j)_{\text{fr}}$ 的简单而逼真的形式。

$$\frac{ft^3}{lb}\frac{1}{ft^4}\frac{lb^2}{s^2}=\left[lb\frac{ft}{s^2}\right]\frac{1}{ft^2}=\frac{pdl}{ft^2}.$$

这样，在两种情况下，我们都得到所要求的压力降落的单位。

为了得到经过弧 s_j 的整个压力降落，我们简单地把摩擦和上升所产生的作用加起来，即

$$\Delta p_j=(\Delta p_j)_{fr}+(\Delta p_j)_{el}=\frac{F_j}{\rho A^2}|w_j|w_j+\rho L_j g\cos\theta_j. \quad (21)$$

因为摩擦系数和密度是正的量，所以这个等式把压力降落定义成为弧流量的一个严格增加的非线性函数。这个函数的图形如图 23.9 所示。图中也展示了从 (21) 中解出的反函数 w_j 的图形。容易看到，这个反函数可明显地写成

$$w_j=f_j(\Delta p_j)\equiv A_j\sqrt{\frac{\rho}{F_j}|\Delta p_j-\rho L_j g\cos\theta_j|}\operatorname{sgn}(\Delta p_j-\rho L_j g\cos\theta_j). \quad (22)$$

其中 sgn (x) 是所谓符号函数，由下式定义

$$\operatorname{sgn}(x)=\begin{cases}1, & 若 x>0\\ 0, & 若 x=0\\ -1, & 若 x<0.\end{cases}$$

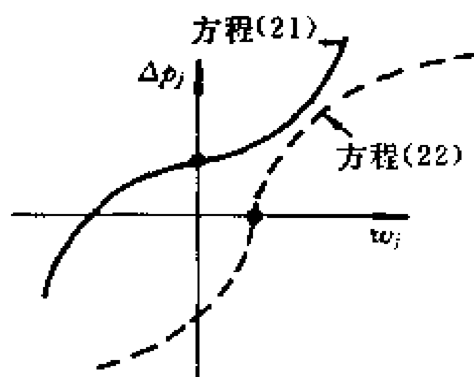


图 23.9 弧特征和反函数

现在我们注意到，(22) 准确地具有形式 (6)，从而定义了一个弧特征。此外，因为 (18) 是基尔霍夫结点定律，我们看到，我们已经把流动问题简化为解网络方程的问题了。(22) 不仅定义了一个弧特征，而且 (甚至更好) 定义了一个容许特征。因此，根据定理 1，如果网络中至少有一个边界结点的话，那么，流动问题就有一个唯一解。

通过实际问题的某些简化，我们得到了事态的这种幸运的数

学表示。我们不声不响地作了最有争议的简化假设之一是，**忽略了热的影响**。回顾一下先前的关于蒸汽发生器的讨论，我们提到过，感兴趣的流动量是蒸汽和水的双相混合物。可是，双相流动法的模型，一般说来是十分复杂的，并且要用到一些假设，而这些假设又不能由基本原理（它们是通过实验得出的经验关系）推出。也许，解决问题的最简单的方法是，假定 w_j 表示双相混合物的质量流速率，而这当中的蒸汽百分率——这百分率被称为**品质**——是混合物的热能的一个简单函数。这假设意味着两相以相同速度同时运动，一种关于某种类型的慢动的条件被破坏了。

混合物的热能的一种度量单位是焓 H. 在上面的假设下，如果知道了混合物的质量流量和焓，那么，可知道（通过品质）存在于混合物中的蒸汽的质量流量。新变量 H 的引入，需要把其他方程加到模型中去。这来自热能守恒原理，而我们一直考虑的网络模型可以写为

$$H_i\Big(\sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j>0}} w_j-\sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j<0}} w_j\Big)=\sum_{\substack{s_j\in\omega^-(i)\\ w_j>0}}(w_jH_{P(j)}+\varphi_j)-\sum_{\substack{s_j\in\omega^+(i)\\ w_j<0}}(w_jH_{Q(j)}-\varphi_j), \tag{23}$$

$i=1, \cdots, v$. 这里我们用 φ_j 表示加* 到弧 j 上的外部热率。注意到，像压力一样，焓是一个结点变量。

如果我们用英国热量单位（记作 BTU）来度量热，那么，焓的单位可以取作 BTU/lb. 如果 φ_j 的单位为 BTU/s，那么，(23) 的两边有单位 BTU/s. 因此，(23) 等于在结点 i 的热率。左边为流体流出时从结点处消失的热率，而右边为流入的流体加到结点处的热率。

* 自然，在我们的蒸汽发生器模型中，热从原回路中通过管壁传出。

我们注意(23)中流率 w_j 的出现。如果假定我们知道这些量，而且给定 φ_j（也就是，如果我们知道从管子中附加的热），那么，(23)构成了一个关于焓的线性方程组。另一方面，因为焓没有在网络方程中出现，所以，我们可以跟（23）**无关地**去解它们。这是我们假设密度 ρ 为常数的一个结果。在较一般的情况下，流动区域中任一点的密度是这点上的压力和焓的函数，比如说

$$\rho = R(p, H). \tag{24}$$

方程（24）称为**状态方程式**。在蒸汽发生器计算中，管际空间上的压力变化小到足以证明把 ρ 看作与 p 独立是合适的。换句话说，p 可以估算成为一个常数——"系统压力" p^* 使（24）成为*

$$\rho = R(p^*, H). \tag{25}$$

如果 H 为常数，那么，当然，密度也将是常数。然而，要证明 H 为常数的假设正当，却很困难，特别在蒸汽生成的时候。如果假定 ρ 由（25）给出，并且把它用于特征（22），那么，网络方程就含有结点焓，因而**必须与**（23）**联立求解**。这是一个比只包含网络方程困难得多的问题，并且大大地超出了本章的教学企图。因此，我们通过假设密度是常数来回避它。

我们将把这节的余下部分，通过考察（22）的等价形式(21)，用于估计弧特征（22）。这需要引入某些**偏微分方程**，但它们既不影响网络方程也不影响今后的发展过程。因此，如果将这节的余下部分省略，不会妨碍叙述的连续性。

把牛顿第二定律应用于流体的一个无穷小元素，结果形成一组偏微分方程，通称为 Navier-Stokes 方程。这些方程的推导几乎可在任一本流体动力学的书中找到，比如［9］或［10］。如果运动是稳定的** 且是二维的，就像早先考虑的蒸汽发生器的薄片一

* 见表 2 的脚注。

** 在稳定的运动中，所有关于时间的偏导数均为零。

样，那么，这些方程是

$$\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})+F_1, \qquad (26)$$

$$\rho(u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y})=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2})+F_2. \qquad (27)$$

方程（26）和（27）是按照直角坐标（x，y）来写的。量 u 和 v 分别表示流体在 x 和 y 方向上的速度分量，p 表示压力，而 ρ（常量）表示密度。常数 μ 称为粘度，它反映了流动液体元之间相互作用的剪切力。F_1 和 F_2 两项表示像重力和边界上的摩擦阻力那样的力* 的 x 分量和 y 分量。为了我们的应用，我们取 F_1 为（见 [11]）

$$F_1=-\frac{f}{2D}\rho|u|u-\rho g\cos\theta, \qquad (28)$$

其中 f 为另一个摩擦系数（参考 [20]），而 D 为一个有长度单位的量，称为水力的或等价的直径**。角 θ 为 x 轴和重力向量的方向之间的夹角。

如果我们沿平行于 x 轴的弧 s_j 积分（26），那么可得

$$\Delta p_j=p_P-p_Q=-\int_P^Q F_1\mathrm{d}x+I, \qquad (29)$$

其中

$$I=\int_P^Q[\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})-\mu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2})]\mathrm{d}x.$$

根据积分中值定理，

$$-\int_P^Q F_1\mathrm{d}x=\frac{f}{2D}L_j\rho|\bar{u}|\bar{u}+\rho gL_j\cos\theta, \qquad (30)$$

其中 $\bar{u}$ 为弧上某点的速度。

---

* （26）和（27）中的每一项的量纲是单位体积上的力。

** 除了在环形管中流动时，D 与管子直径一致外，这个量的物理含义是含糊的（进一步的讨论见 [9 的第 11 章]）。

因此，如果我们定义弧的质量流率为 $w_j=\rho A_j\bar{u}$，并设 $F_j=fL_j/2D$，那么，(30) 成为

$$-\int_P^Q F_1\mathrm{d}x=\frac{F_j}{\rho A_j^2}|w_j|w_j+\rho gL_j\cos\theta.$$

从而，由 (29) 得到

$$\Delta p_j=\frac{F_j}{\rho A_j^2}|w_j|w_j+\rho gL_j\cos\theta+I. \tag{31}$$

把这方程同 (21) 比较，我们看到，它们的差别只是积分 I. 如果我们认可 Navier-Stokes 方程提供了流体运动的一个精确描述，那么，I 是由于运用了特征 (22) 而引起的误差。

让我们考虑 I 这项。因为

$$u=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\qquad v=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

由链规则知，

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y},$$

但是，$a=\mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$ 为流体元沿 x 方向的加速度。于是

$$\int_P^Q\rho(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y})\mathrm{d}x=\int_P^Q\rho a\mathrm{d}x \tag{32}$$

表示由于流体沿弧运动所产生的惯性力的积分。

正如我们早已提到过的，I 的剩下部分是由于流体元的相对运动所造成的剪切作用产生的。如果称 (32) 为惯性效应，那么，

$$-\int_P^Q\mu(\partial^2u/\partial x^2+\partial^2u+\partial y^2)\mathrm{d}x$$

就可称作粘性效应了。因为我们的特征 (22) 假定了这两者都为零，所以，我们期望当或者粘性效应或者惯性效应和由摩擦与升高引起的那些效应不相上下时，(22) 的误差才具有重要的地位。

4. 网络方程的数值解法

已经把蒸汽发生器流动问题化为解网络方程的问题了，剩下的是用公式表示关于它们的解的算法。我们在第2节中已经看到，这些方程具有唯一的解。但是，由于特征（22）的特性，它们当然是非线性的。因此，一个紧凑解，即使在高斯消去意义下，也是毫无可能的，因而我们应采用迭代法。

我们即将考虑的迭代法，称为**非线性 Gauss-Siedel（记作 NGS）法**，它是线性情况下熟知的方法的自然推广*。我们将就一个一般的含 v 个未知量的 v 个方程的方程组正式给出定义。

假定 $F_i(x_1, \cdots, x_v)$，$i=1, \cdots, v$，是实变量 x_i，$i=1, \cdots, v$ 的连续实值函数，那么

$$F_i(x_1, \cdots, x_v) = 0, i = 1, \cdots, v \tag{33}$$

表示 v 个方程的方程组，而且任一组满足(33)的实数 $x_1^*, \cdots, x_v^*$，称为这个方程组的解。NGS 法按下述方式定义一个向量迭代序列 $x^k = (x_1^k, \cdots, x_v^k)$，$k=0, 1, \cdots$.

第1步：选定 x^0；

第2步：假定 x^k $(k \geqslant 0)$ 和 x_q^{k+1}，$q=1, \cdots, i-1$ $(1 \leqslant i \leqslant v)$ 已经确定；

第3步：为确定 x_i^{k+1}，求 s 使得

$$F_i(x_1^{k+1}, \cdots, x_{i-1}^{k+1}, s, x_{i+1}^k, \cdots, x_v^k) = 0, \tag{34}$$

然后令 $x_i^{k+1} = s$.

注意到，在第2步中当 $i=1$ 时，条件 x_q^{k+1}，$q=1, \cdots, i-1$ 是无意义的，而 x_1^{k+1} 在第3步中是作为

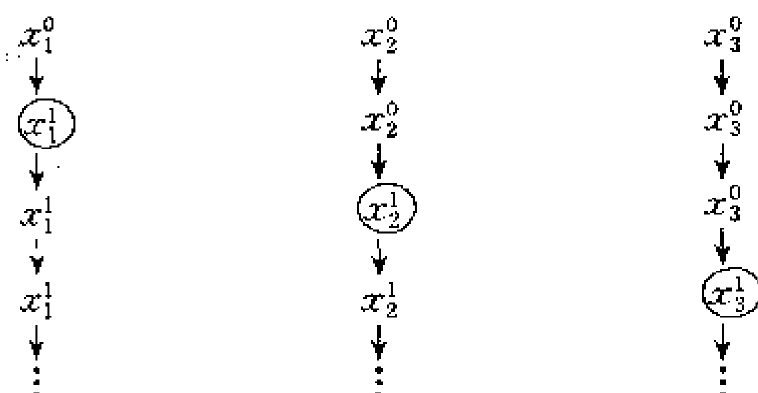
---

* 线性的方法也称为“单步法”、“逐次置换法”和“Liebmann 法”。更详细的叙述见[12]。

$$F_1(s, x_2^k, \cdots, x_v^k) = 0$$

的解来确定的。

显然，NGS 法的意义是明确的，也就是说，迭代 x^k 被唯一确定的充分必要条件是每一个标量方程（34）有一个唯一解 s。如果这是真的，那么，对于 $v=3$ 的情况，NGS 序列的元素按表的图解顺序来确定。表中每一行对应于（34）的特解，它们决定着圈出的变量。



任何一种迭代法的一个中心问题，涉及到迭代的收敛性；存在数 x_i^*，$i=1$，…，v，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k = x_i^*, \quad i = 1, 2, \cdots, v$$

吗？就 NGS 法而论，迭代明显地不仅依赖于函数 F_i，而且也依赖于初始迭代 x^0. 因此，对 x^0 的某些选择它们可能收敛，而对其他的选择却不收敛。如果它们对 x^0 的**任意**选择都收敛，我们就说这种方法是**整体收敛**的。这是一个迭代方法所具有的非常受人欢迎的性质，因为它意味着，我们没有必要为了能够收敛而特别关心如何着手这方法。

因为函数 F_i 是连续的，由（34）得到，只要 NGS 迭代真正收敛，它们就一定收敛到（33）的解。因此，用 NGS 法求（33）的解的问题，关键在于它的迭代收敛。

通过追溯到公式（8）并令

$$F_i(p_1,\cdots,p_v)=\sum_{j=1}^{m}a_{ij}f_j(\sum_{q=1}^{n}a_{qj}p_q),\quad i=1,\cdots,v. \qquad (35)$$

可以看到，网络方程是（33）的特殊情况。初看起来，这个方程似乎是不成立的，因为左边只包含前 v 个压力，而右边含有所有 $n>v$ 个压力。但是，不要忘记，结点 $v+1$，…，n 是边界结点，在其上所对应的压力假定为已知的。因此，右边实际上只包含 v 个未知量。

下面的定理完全回答了 NGS 法对于网络方程如何表现的问题。它保证即使不是最好的，也是安排得相当好的状况。

定理 2 如果一个网络 η 的弧具有容许特征，且至少有一个边界结点，那么，NGS 迭代法的意义是明确的，并且整体收敛于网络方程的唯一解。

尽管这个定理的证明不特别困难，写在这里却太长了。可以在［13］中找到证明。

定理 2 断言，我们可以用 NGS 法计算出网络方程的近似解，而且只要准确地解（34）并迭代足够多次，就可使这一解与精确解接近到任意的精确度。自然，因为（34）是一个关于未知量 s 的非线性标量方程，要精确地解它一般来说是不可能的。事实上，通常使用辅助的数值方法得到它的近似解。这意味着在实践中我们不能实现定理 2 的假设。尽管如此，我们还是指望：如果（34）被准确地解出来，那么，由此引起的近似的 NGS 迭代将收敛于网络方程的精确解。

其次一点提出考虑的是，实际上实现 NGS 法时，涉及到何时中止迭代的问题。这个问题还没有十分令人满意的回答。

通常，判断中止是以相继的迭代的差的某种量度为基础的。比如，如果定义 x 的范数 $\|x\|$ 为 $(\sum_{i=1}^{v}x_i^2)^{1/2}$，那么，可以在使得

$$\|x^k-x^{k-1}\|<\varepsilon\|x^k\| \qquad (36)$$

成立的第一个 k 值处中止迭代，其中 $\varepsilon>0$ 为预定的收敛标准。注

意到，(36) 决不保证误差的范数 $\|x^k - x^*\|$ 比 ϵ 小。

较精致的中止准则可以通过考虑方法的收敛速度明确表达出来。若干方法确定了这种速度存在（比如，见 [14 的第 9 章]），但在实践中，一般必须估计迭代结果。一个运用收敛速度的中止准则包含在 [15] 中。

收敛速度的概念可用来达到其他有用的目的——常常使我们能够比较不同的迭代方法。举例来说，由 NGS 法在第 3 步中简单地令 $x_i^{k+1} = \omega s + (1-\omega)x_i^k$，我们得到非线性逐次超松弛法。这里

表 1

j	L_j (ft)	A_j (ft²)	F_j	θ_j (deg)
1	0.5	0.28	0.106×10^{-3}	0.
2	0.5	0.21	0.136×10^{-3}	0.
3	0.5	0.28	0.106×10^{-3}	0.
4	1.25	0.124	0.53×10^{-3}	0.
5	1.25	0.093	0.7×10^{-3}	0.
6	1.25	0.124	0.53×10^{-3}	0.
7	0.16	0.01	0.6×10^{-3}	0.
8	0.16	0.01	0.6×10^{-3}	0.
9	0.16	0.01	0.6×10^{-3}	0.
10	1.25	0.124	0.53×10^{-3}	0.
11	1.25	0.093	0.7×10^{-3}	0.
12	1.25	0.124	0.53×10^{-3}	0.
13	0.5	0.28	0.106×10^{-3}	0.
14	0.5	0.21	0.136×10^{-3}	0.
15	0.5	0.28	0.106×10^{-3}	0.
16	0.5	0.42	0.112×10^{-2}	90.
17	0.5	0.42	0.112×10^{-2}	90.
18	0.5	0.047	0.0105	90.
19	0.5	0.047	0.0105	90.
20	0.5	0.047	0.0105	90.
21	0.5	0.047	0.0105	90.
22	0.5	0.42	0.112×10^{-2}	90.
23	0.5	0.42	0.112×10^{-2}	90.

$1 \leqslant \omega < 2$ 称作松弛参数。令 $\omega = 1$，我们重新得到 NGS 法。然而，把 ω 选得远比 1 大时，常常得到收敛速度比 NGS 迭代显著地快得

多的迭代(见下一节的实例)。更值得注意的是，对于一大类问题，是根据收敛速度定量地作出预言的。更多的关于逐次超松弛法的介绍，线性的情况可参考 [12]，[16]，非线性的情况可参考 [13]，[15]。

在相应的方程组（33）表示网络方程的情况下，我们对（34）的数值解最后再说几句话以结束本节。由（35），我们看到第 i 个网络方程是

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j\left(\sum_{q=1}^{n} a_{qj} p_q\right) = 0, \tag{37}$$

由此得到（34）的第 i 个方程是

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} f_j\left(\sum_{1\leqslant q<i} a_{qj} p_q^{k+1} + a_{ij} s + \sum_{i<q\leqslant v} a_{qj} p_q^{k} + \sum_{v<q\leqslant n} a_{qj} p_q^{*}\right) = 0. \tag{38}$$

我们记得 a_{ij}是关联矩阵第 i 行第 j 列的元素，而函数 f_j（t）确定容许弧特征*。对于蒸汽发生器流动问题，由（22）明显地给出。

于是，（38）中的每一项可以写成 $a_{ij}f_j$（$a_{ij}s+C_{ij}^k$），其中 $a_{ij}=0$，±1 而 C_{ij}^k为一常数。因为特征是容许的，由此可得，和式（38）的每一个非零项是 s 的严格增加函数，并且改变过符号，因而这对和也同样正确。因此，恰好有一个 s 值为（38）的解，我们可通过像分半方法、试位法等** 数值法计算这个值。

5. 例　　题

在这一节，我们将继续做涉及图 23.5 的网络流量问题的研究。这个问题早已在第 3 节中讨论过，并导出一组形如（37）的

---

* 为了验证对（38）的特性的理解，读者应该确信，对于图 23.5 的网络，当 $i=2$ 时它所适用的方程为 $-f_2(p_{14}^{*}-s)+f_5(s-p_1^{k})-f_{16}(p_1^{k+1}-s)+f_{17}(s-p_3^{*})=0$.

** 这些基本方法的叙述和分析见 [17]，[18]。

12 个网络方程。这些已由关联矩阵、确定弧特征（22）的数据和边界条件完全描述了。

关联矩阵的元素可以用一个简明的方法由图 23.5 直接得到。比如，第一行的非零元素是 $a_{11}=-1$，$a_{14}=1$ 以及 $a_{1,15}=1$.

为确定特征（22），我们取 $\rho=49\text{lb/ft}^3$，$g=32.2\text{ft/s}^2$，并保留表 1 的数据。我们已经选择的密度近似于 600 个绝对压强（lb/in^2）下沸水的密度。至于边界条件，我们假设为 $p_{13}=p_{14}=p_{15}=7\ 600\text{pdl/ft}^2$，而 $p_{15}=p_{17}=p_{18}=0.0\text{pdl/ft}^2$.

由这些条件确定的问题，我们按第 4 节中叙述的 NGS 法用电子计算机求解。初始压力取作 $p_i^0=330\text{pdl/dt}^2$，$i=1, 2, \cdots, 12$. 经 36 次迭代后，量 $[\sum_{i=1}^{12}(p_i^{36}-p_i^{35})^2]^{1/2}$ 小于 10^{-4}，于是宣告问题收敛。这样得到的压力和流量见表 2 和表 3. 然后用非线性逐次超松弛法（取 $\omega=1.33$）解这个问题。经 19 次迭代，得到基本上相同的解，这个例子说明了取 $\omega>1$ 的迭代得到的好处。

表 2

结点	压力* (pdl/ft²)	结点	压力 (pdl/ft²)	结点	压力 (pdl/ft²)
1	6810.6	2	6810.6	3	6810.6
4	4826.6	5	4820.2	6	4826.6
7	2773.4	8	2779.8	9	2773.4
10	789.41	11	789.41	12	789.41

* 把每平方呎磅达转换为较熟悉的每平方吋磅时要乘上 0.216×10^{-3}. 于是，在结点 1 处的压力为 1.47lb/in^2. 注意到，在问题的定义域上整个压力变化小于 1.35lb/in^2. 这和前面的常数系统压力（见（25））一致。

表3

弧	流量 (lb/s)	弧	流量 (lb/s)	弧	流量 (lb/s)
1	136.3	2	90.8	3	136.3
4	129.3	5	104.7	6	129.3
7	121.3	8	120.8	9	121.3
10	129.3	11	104.7	12	129.3
13	136.3	14	90.8	15	136.3
16	6.94	17	−6.95	18	8.08
19	−8.08	20	−8.08	21	8.08
22	−6.95	23	6.93		

参 考 文 献

[1] *Steam, Its Generation and Use*. New York: Babcock and Wilcox, 1972

[2] R. B. Potts and R. M. Oliver, *Flows in Transportation Networks*. New York: Academic, 1972

[3] L. R. Ford and D. R. Fulkerson, *Flows in Networks*. Princeton, NJ: Princeton Univ. Press, 1962

[4] C. Berge and A. Ghouila-Houri, *Programming, Games and Transportation Networks*. New York: Wiley, 1965

[5] R. G. Busacker and T. L. Saaty, *Finite Graphs and Applications*. New York: McGraw-Hill, 1965

[6] *The Holy Bible*, Exodus 14:21

[7] C. C. MacDuffee, *Vectors and Matrices*, Carus Mathematical Monograph Number 7, Mathematical Association of America, 1943

[8] G. Birkhoff, "A variational principle for nonlinear networks," *Q. Appli. Math.*, vol. 21, pp. 160—162, 1963

[9] J. G. Knudsen and D. L. Katz, *Fluid Dynamics and Heat Transfer*, New York: McGraw-Hill, 1958

[10] R. Von Mises and K. O. Friedrichs, "Fluid dynamics," in *Applied Mathematical Sciences*, vol. 5. New York: Springer-Verlag, 1971

[11] J. E. Meyer, "Hydrodynamic models for the treatment of reactor thermal transients", *Nucl. Sci. and Eng.* vol. 10, pp. 269—277, 1961

[12] R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962

[13] W. Rheinboldt, "On M-functions and their application to nonlinear Gauss-Seidel iterations and network flows," *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 32, pp. 274—307, 1970

[14] J. Ortega and W. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*. New York: Academic, 1970

[15] L. A. Hageman and T. A. Porsching, "Aspects of nonlinear block successive overrelaxation," *SIAM J. Numerical Anal.*, 1975

[16] D. Young, *Iterative Solution of Large Linear Systems*. New York: Academic, 1971

[17] A. Ostrowski, *Solution of Equations and Systems of Equations*, 2nd ed. New York: Academic, 1966

[18] J. Traub, *Iterative Methods for the Solution of Equations*. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1964

[19] S. K. Beal, "Deposition of particles in turbulent flow on channel or pipe walls," *Nucl. Sci. Eng.*, vol. 40, pp. 1—11, 1970

[20] ——, "Prediction of heat exchanger fouling rates—A fundamental approach," preprint of paper presented at AICHE Meeting, Nov. 1972

[21] W. A. Blackwell, *Mathematical Modeling of Physical Networks*. New York: Macmillan, 1968

教 师 参 考

预备知识 本章内容为那些学过初等微积分和线性代数的学生所能理解。熟悉一些物理上的（也就是质量、能量和动量）基本守恒定律是希望的，但不是必要的。计算机程序设计的情况也是一样，因为一个学生会非常高兴地通过使用电子计算机来“一举消灭”他已经花过很多时间的问题。

时间 这个单元3次以内可以讲完——如果把许多材料留给

学生的话，用的时间可以更少。

注 第1节：这开头的一节，试图通过联系核电站运转中遇到的实际问题来推动整个研究。教师应该强调，这个问题对核动力工业具有真正的利害关系，涉及价值几百万美元的电站组件。他还应向学生说明电站和蒸汽发生器的简图，并且概述发生的传热和液压过程。电站运转的更详细的情况可以在 [1] 和 G. Masche 的"Systems Summary of a Westinghouse Pressurized Nuclear Power Plant"（这可以通过给 Westinghouse Electric Corporation——威斯丁豪斯电气公司写信而得到）中找到。

第1节讨论过后，课上将介绍问题的一般的非技术性叙述。这里，除了网络近似法以外，老师可以希望考虑另外的着手解决的方法。比如，如果班上的数学水平足以容许考虑偏微分方程的话，那么，这个问题从寻求流体动力学的经典方程——动量（Navier-Stokes）方程和连续性方程的恰当解的观点来看，可以重新陈述。这是最直截了当的着手方法，但是你很快就会认识到，因为流动区域的几何形状和方程本身的复杂性质，这样一种着手解决的方法不见得会成功。作为方程的完整解的替换物，人们可以满足于用有限差分的数值解。这下打开了一门全新的学科——计算流体动力学的大门。在这方面，可以请教 P. J. Roach 的 *Computational Fluid Dynamics*, Hermosa Publishers, 1972. 然而，直接用有限差分方法将带来巨大的计算问题，它的可解性尚有争议。

第2节：这节安排了形成模型的基本工作，它是以简单的网络概念为基础的。本节是自成系统的，还可以用于图论或非线性方程组的数值解等补充课程。

基尔霍夫结点定律的物理意义作为离散的守恒定律将被强调。自然，电网络中的电流满足同样的定律。

在课上编制若干个简单图形的关联矩阵会有好处。证明 n 行的关联矩阵有秩 $n-1$，决不是没有意义的空谈练习。这个事实过

后用来完成关于网络流的存在与唯一性定理的证明。秩的确定可以规定为课堂练习。以上对论证边界流量的总和为零也适用。

在电网络术语中，弧特征就是熟悉的欧姆定律。教师可以诱导（6）的形式，使之想起这样一类流量：在物理中已经知道，许多流量依赖于另一个变量的值的差；例如，热依赖于温度差，电流依赖于电压差，以及空气流量依赖于大气压力差。

使全班明白网络方程（7）的性质是非常重要的。对于特殊网络，这些已经详细写出来了。通过用某些简单函数代替弧特征，教师可以把这个实例引伸到更深一层。

为了节省时间，定理1在线性弧特征情况下的证明，可以省略。但是，它确实包含了矩阵代数的一种有效应用。

第3节：本节提出了蒸汽发生器流量问题的网络模型。基本手段是“控制体”法，这在流体动力学中是十分常见的。

除了上升和摩擦以外，对压降起作用的一些其他因素是突然的膨胀，或者是流动区域的缩小或急弯，或者是流动区域中的隅角。（较详细的叙述见［9］）。

在这一节引入的经验数量中，摩擦系数最难理解。关于这点，较详细的叙述可以参考［9］。变通的办法，教师可以邀请从事工程的同事讲授摩擦系数的本质和确定方法以及其他相关的内容。

为了使学生对实际问题的复杂性以及按照一个网络模型来公式化所需要的假定有某些了解，教师应该详细讨论热效应的性质。另一方面，如果听讲者不熟悉偏微分方程，对于弧特征的评价（尽管它对未考虑到的压降效应的了解起到一定作用）也可以省略。

第4节：本节叙述迭代法，用它可求网络方程的数值解。像第2节一样，它是自成系统的并且构成数值分析中一个小小的练习。用到的概念仅仅是极限、连续、函数复合，以及解单一方程的分半方法。分半方法或一个等价名词可能是任一种数值分析的

要素，它的子程序成套设备由计算机工厂提供。

收敛速度和逐次超松弛的概念，对于解网络问题不是最重要的。引入它们是用来给有兴趣者提供进一步的研究方向。

第 5 节：在这里介绍了一个设想的但非平凡的例题以及它的数值解。理想地，听讲者应写出解这个问题的计算机程序或者他们自身已经设计过了。如果时间或计算机不可能允许完成这样一个热望的任务，那么，听讲者至少应该手算少数几个在已知结点上的压力迭代，假定在剩下的结点上的压力为表 2 所给定。这样，他们将看到，迭代确实趋于表 2 中恰当的量。

流量问题解决以后，教师可希望返回来提及在第 1 节引入的简单的粒子沉积模型，使听讲者计算一些各种粒子浓度的粒子沉积通量。而且，如果假设当平均沉积厚度超过预定的量（比如说，0.25ft）时，为了清扫，必须把蒸汽发生器关掉，那么，当发生这件事时，计算* 可以终止。这是一种办法，使流量问题的解答可以用来提供关于实际的蒸汽发生器的相应信息。



* 例如，人们可以假定，只涉及粒子直径为 $1\mu m=10^{-6}m$，它们的密度为 $5lb/ft^3$，而平均浓度为 $10^{-4}lb/ft^3$. 计算时可以用表 3 的数据和图 23.3 来完成。注意到该图中纵坐标的单位为 cm/s 而不是 ft/s.